Санкт-Петербургский
Политехнический университет Петра Великого

Отчет по лабораторной работе №8

Интерполяционные полиномы приближения табличных функций

Полином в форме Ньютона справа-налево

Студент: Чинь Тхи Тху Хоай
Преподаватель: Козлов Константин Николаувич

Группа: 5030102/20001

Санкт-Петербург
2024

Содержание

1 Формулировка задания и её формализации 2

2 Алгоритм методов и условия их применимости 2
2.1 Построение сетки 2
2.1.1 Равномерная сетки 2
2.1.2 Сетка Чебышева 2
2.1.3 Сгущену сетки 2
2.2 Построение полинома Ньютона 2
2.2.1 Алгоритм 2
2.2.2 Условие применимости 3

3 Тестовый пример с детальными расчетами для задачи малой размерности 4

4 Подготовка контрольных тестов 5

5 Модульная структура программы 5

6 Численный анализ решения задачи 6
6.1 функции $y = th(x)$, [a,b] = [-3,3] 6
6.2 функции $y = 3\text{sign}(x)x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$, [a,b] = [-1, 1.5] 9

7 Краткие выводы 11

1 Формулировка задания и её формализации

Требуется аппроксимировать функцию с помощью интерполяционного многочлена Ньютона (назад) для заданных функций на некотором отрезке [a,b], используя равномерную сетку, сетку Чебышева и сетку со сгущением в окрестности выбранной точки. Для этих полиномов исследовать зависимость ошибки функции от количества узлов в сетке.

2 Алгоритм методов и условия их применимости

2.1 Построение сетки

2.1.1 Равномерная сетки

Пусть задан отрезок $[a, b]$ и n точек на этом отрезке
Равномерная сетка $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ тогда записывается так:
$x_i = x_0 + ih$, где $i = 0, ..., n$; $x_0 = a; h = \frac{b-a}{h}$

2.1.2 Сетка Чебышева

Пусть задан отрезок $[a, b]$ и n точек на этом отрезке
Сетка Чебышева $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ тогда записывается так:

$x_i = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2} cos\left(\frac{\pi(2i+1)}{2n}\right)$, где $i = 0, ..., n-1$

2.1.3 Сгущену сетки

Пусть задан отрезок $[a, b]$ и n точек на этом отрезке
Сгущену сетки $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ тогда записывается так:

$x_i = a + (b-a)(\frac{i}{n})^2$, где $i = 0, ..., n-1$

2.2 Построение полинома Ньютона

2.2.1 Алгоритм

Дано: Некоторая сетка $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ и сеточная функция $\{f_i\}_{i=0}^{n}$ от таблично заданной функции, для которой требуется построить полином Ньютона.
Для того чтобы найти полином Ньютона, необходимо через значения функции $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ сначала определить разделенные разности. Посчитаем разделенные разности по формулам:

$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$
$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$
$f(x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$

Тогда разности второго порядка найдутся по формулам:

$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2-x_0}$

$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$
$f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_{n-1},x_n)-f(x_{n-2},x_{n-1})}{x_n-x_{n-2}}$

Таким образом, если определены k-е разностные отношения $f(x_i, x_{i+1}, ;x_{i+k})$, то (k+1)-е определяются через них равенством:

$f(x_{i-1}, x_i, \dots, x_{i+k}) = \frac{f(x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+k})-f(x_{i-1},x_i,\dots,x_{i+k-1})}{x_{i+k}-x_{i-1}}$

```
Алгоритм:
DivDiff = yk;
for i = 1 : node-1
    for j = 1 : node - i
        DivDiff(j) = (DivDiff(j+1) - DivDiff(j)) / (xk(i+j) - xk(j))
```

Тогда полином Ньютона считается по формуле(справа-налево):

$P_n(x) = f(x_n) + f(x_{n-1}, x_n)(x - x_n) + f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + f(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1)$

Осталось только подставить значения сетки в полином Ньютона и получить желаемый результат.

2.2.2 Условие применимости

Из доказательства единственности интерполяционного многочлена с помощью СЛАУ следует, что абсцисса узлов должны быть попарно различны (в случае с полиномом Ньютона это нужно, чтобы снизжать разделенные разности)
$\forall i, j\ i \neq j, x_i \neq x_j$, то есть все узлы сетки должны быть попарно различны.

3 Тестовый пример с детальными расчетами для задачи малой размерности

Дано: $f(x) = x\ln(x+1)$ на $[1,5]$

1) Равная сетка

x	1	3	5
y	0,693	4,159	8,959

Считать разделенные разности:

+) Первый порядок:

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 1,733$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 2,4$$

+) Второй порядок

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{2,4 - 1,733}{5 - 1} = 0,1668$$

$$P_2(x) = f(x_2) + f(x_1, x_2)(x - x_2) + f(x_1, x_2, x_3)(x - x_2)(x - x_1)$$

$$= 8,959 + 2,4(x-5) + 0,1668(x-5)(x-3)$$

$$= 0,1668x^2 + 1,0656x - 0,539$$

Ошибки вычислений: $R_n(x) = y - P_n(x)$

x	2	4
$R_n(x)$	0,062	0,046

2) Сетка Чебышева:

$$x_i = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2}\cos\left(\frac{\pi(2i+1)}{2n}\right), \text{ где } i = 0, 1, 2;\ a = 1,\ b = 5$$

x	4,732	3	1,268
y	8,262	4,159	1,038

Считать разделенные разности

+) Первый порядок

$$f(x_0, x_1) = \frac{4,159 - 8,262}{3 - 4,732} = 2,369$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1,038 - 4,159}{1,268 - 3} = 1,802$$

+) Второй порядок

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{1,802 - 2,369}{1,268 - 4,732} = 0,1637$$

$$P_2(x) = 1,038 + 1,802(x - 1,268) + 0,1637(x - 1,268)(x - 3)$$

$$= 0,1637x^2 + 1,103x - 0,6242$$

Ошибки вычислений: $R_n(x) = y - P_n(x)$

x	3,866	2,134
$R_n(x)$	0,0291	0,0381

4 Подготовка контрольных тестов

Для исследования влияния количества узлов на сходимость интерполяционного процесса построим интерполяционный полином для двух функций: $y = th(x)$ на отрезке [-3, 3] и $y = 3\text{sign}.(x)x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$ на отрезке [-1, 1.5] для равномерной сетки, чебышевской сетки и сгущену сетки на 5,7 и 10 узлах и построим графики этих интерполяционных полиномов с помощью средств пакета MATLAB. После «наглядных» результатов, построим график ошибок, то есть график модуля разности между значением функции в точке и значением интерполяционного полинома в этой же точке.
Для исследования зависимость ошибки интерполяции и ошибки в выбранных точках 0 от количества узлов, выбрать размер сетки 5:5:100 и найти ошибки.

5 Модульная структура программы

- double* EquallySpaced(double a, double b, int node): Строит равномерную сетку на узлах размера node на отрезке [a,b]

- double* Chebyshev(double a, double b, int node): Строит сетку на узлах Чебышева размера size на отрезке [a,b]

- double *Refine(double a, double b, int node) : Строит сгущенную сетку на узлах размера node на отрезке [a,b]

- double NewtonBack(double x, double *xk, double *yk, int node): Строит интерполяционный полином Ньютона справа-налево по данной сетке и сеточной функции

- double Func1(double x): Возвращает значение функции $y = th(x)$ в точке x

- double Func2(double x): Возвращает значение функции $y = 3\text{sign}(x)x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$ в точке x

6 Численный анализ решения задачи

6.1 функции $y = th(x)$, [a,b] = [-3,3]

- Построить интерполяция функции y = th(x) для равномерной сетки для размер сетки node = [5,7,10]

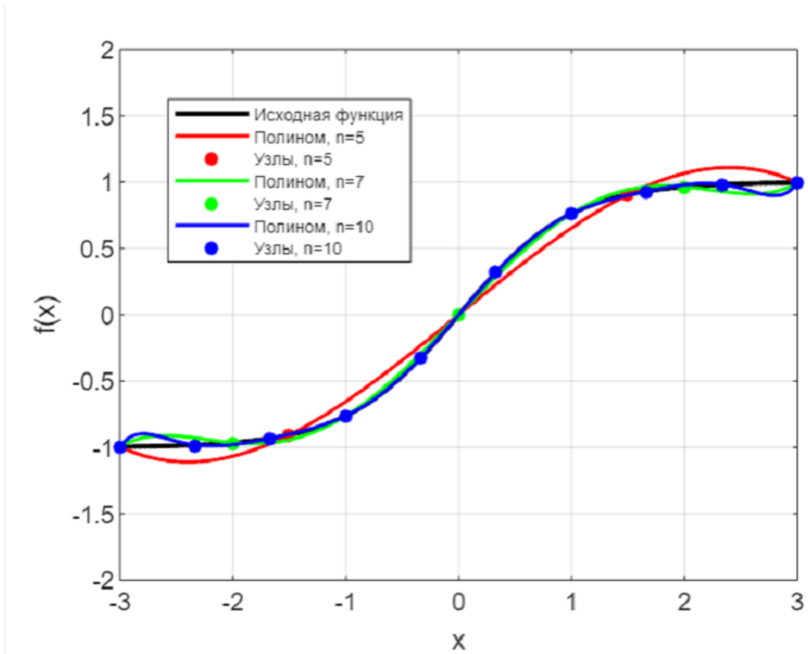

Рис. 1: Интерполяция функции y = th(x) для равномерной сетки'

- Построить интерполяция функции y = th(x) для сетки Чебышева для размер сетки node = [5,7,10]

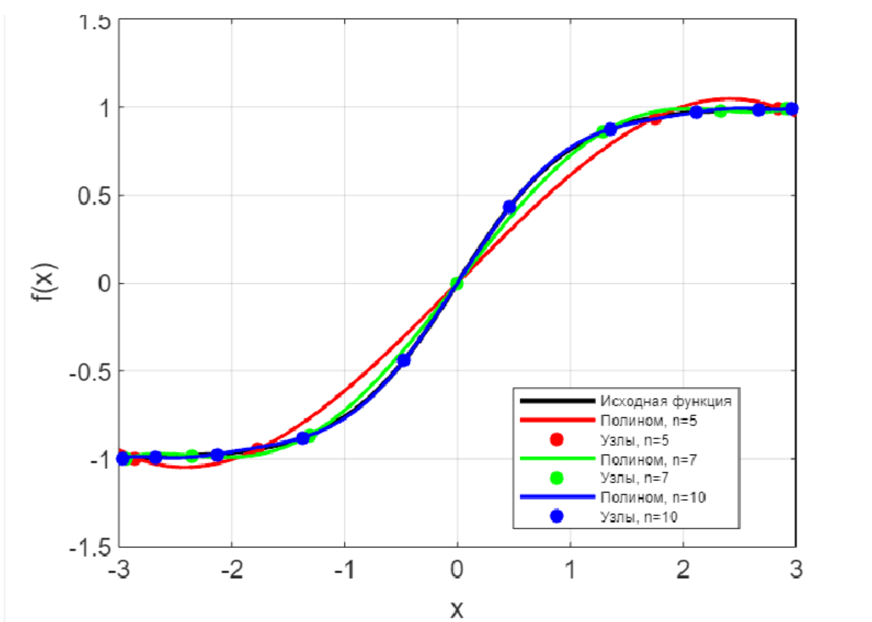

Рис. 2: Интерполяция функции y = th(x) для сетки Чебышева'

- Построить интерполяция функции y = th(x) для сгущение сетки для размер сетки node = [5,7,10]

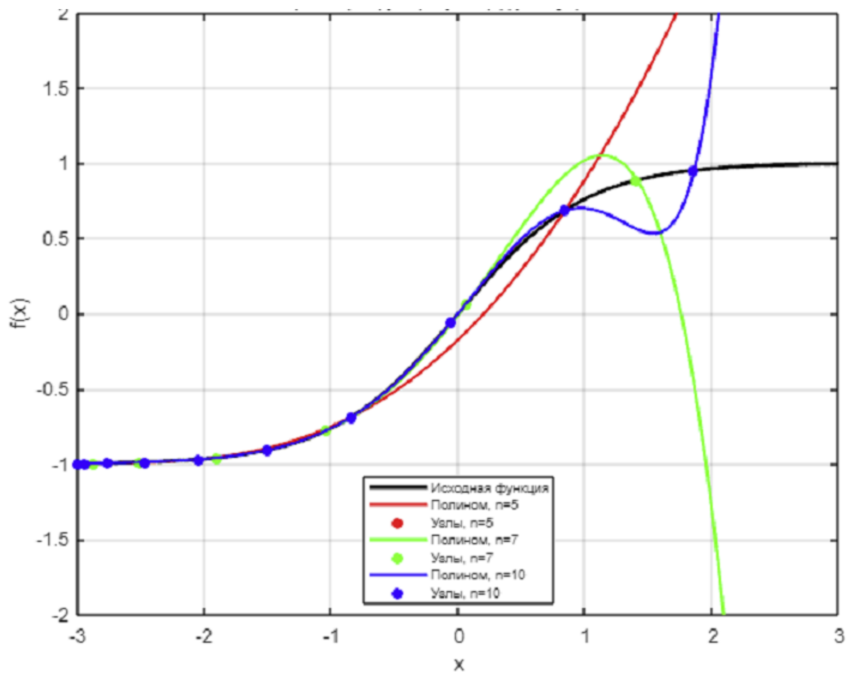

Рис. 3: Интерполяция функции y = th(x) для сгущение сетки'

- Построить линию теоретической ошибки функции y= th(x) для 5 узлов

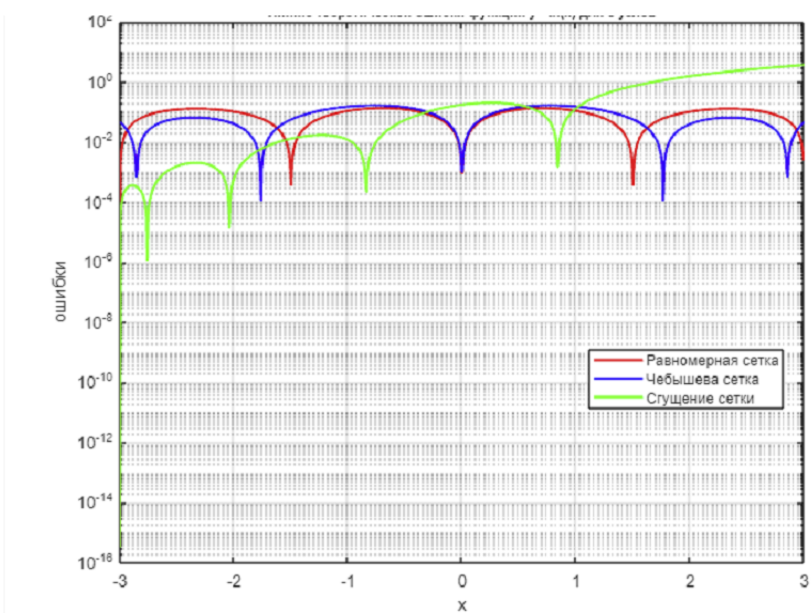

Рис. 4: Линию теоретической ошибки функции y= th(x) для 5 узлов

- Построить зависимость ошибки интерполяции функции y= th(x) от количества узлов(5:5:100)

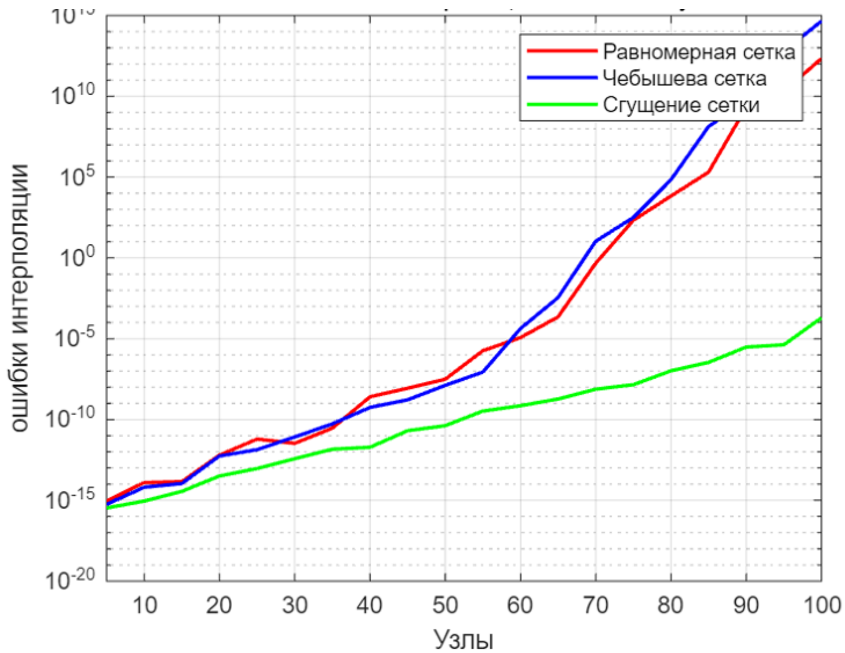

Рис. 5: Зависимость ошибки интерполяции функции y= th(x) от количества узлов

Обнаружено, что функции y=th(x) для сгущение сетки имеет меньшую ошибку, чем для равномерной сетки и для сетки Чебышева.

- Построить зависимость ошибки в выбранных точках 0 и -2.5 от количества узлов(5:5:100)

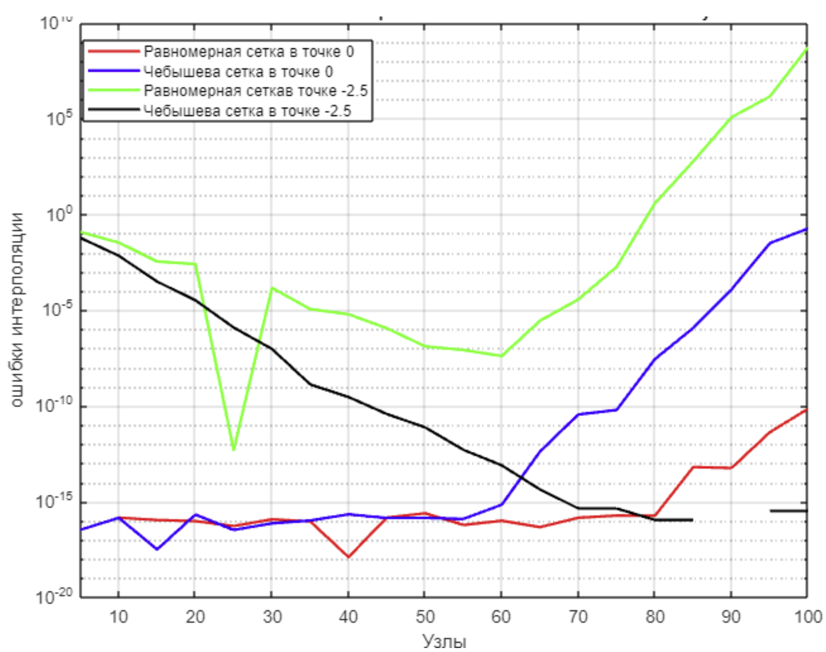

Рис. 6: Зависимость ошибки в выбранных точках 0 и -2.5 от количества узлов

6.2 функции $y = 3\mathbf{sign}(x)x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$, [a,b] = [-1, 1.5]

- Построить интерполяция функции $y = 3\text{sign}(x)x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$ для равномерной сетки для размер сетки node = [5,7,10]

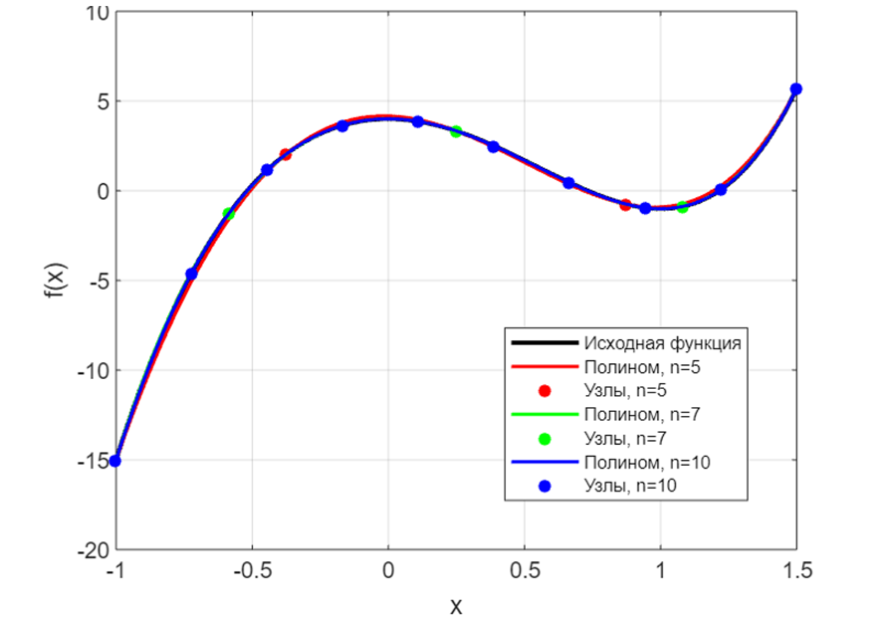

Рис. 7: Интерполяция функции $y = 3\text{sign}(x)x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$ для равномерной сетки'

- Построить интерполяция функции $y = 3\text{sign}(x)x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$ для сетки Чебышева для размер сетки node = [5,7,10]

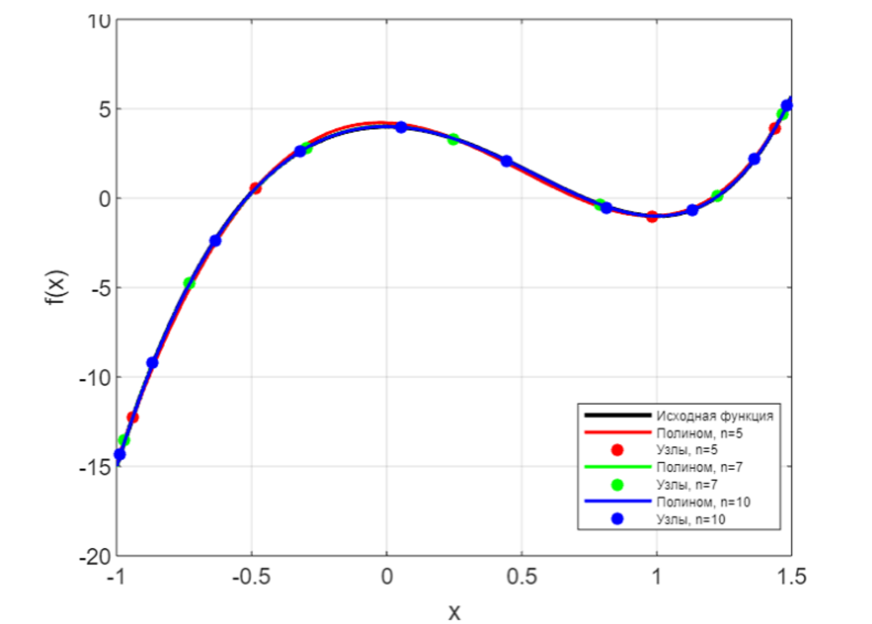

Рис. 8: Интерполяция функции $y = 3\text{sign}(x)x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$ для сетки Чебышева'

- Построить интерполяция функции $y = 3\text{sign}(x)x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$ для сгущение сетки для размер сетки node = [5,7,10]

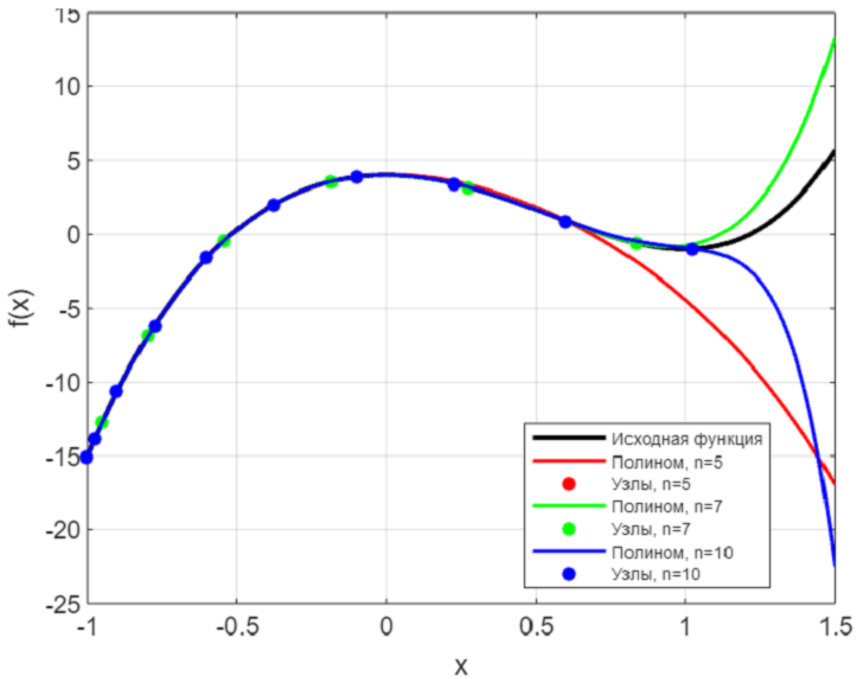

Рис. 9: Интерполяция функции $y = 3\mathrm{sign}(x)x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$ для сгущение сетки'

- Построить зависимость ошибки интерполяции функции $y = 3\mathrm{sign}(x)x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$ от количества узлов(5:5:100)

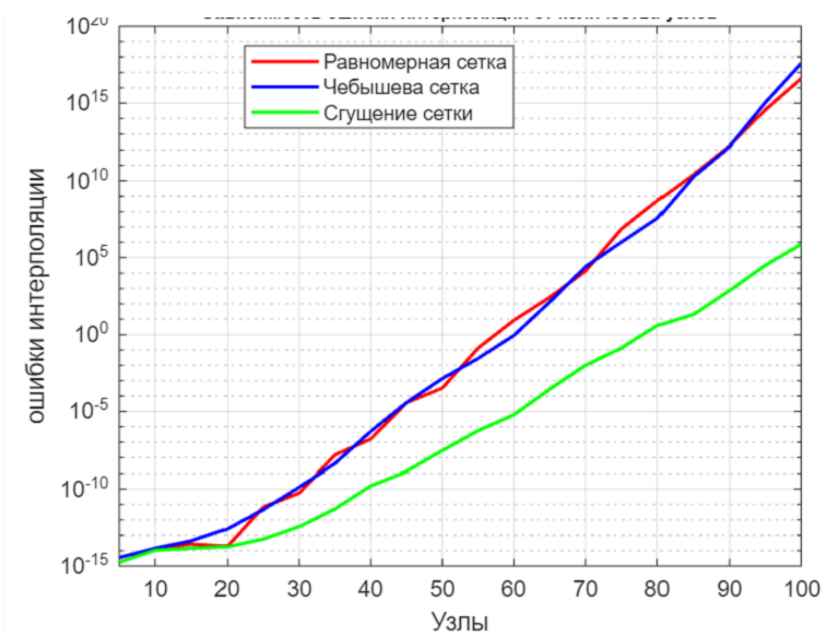

Рис. 10: Зависимость ошибки интерполяции функции $y = 3 * \mathrm{sign}(x)x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$ от количества узлов

Обнаружено, что функции $y = 3\mathrm{sign}(x)x^4+4x^3-12x^2+4$ для сгущение сетки имеет меньшую ошибку, чем для равномерной сетки и для сетки Чебышева , а функции для равномерной сетки и для сетки Чебышева имеют одинаковые ошибки.

- Построить зависимость ошибки в выбранных точках 0 и 1 от количества узлов(5:5:100)

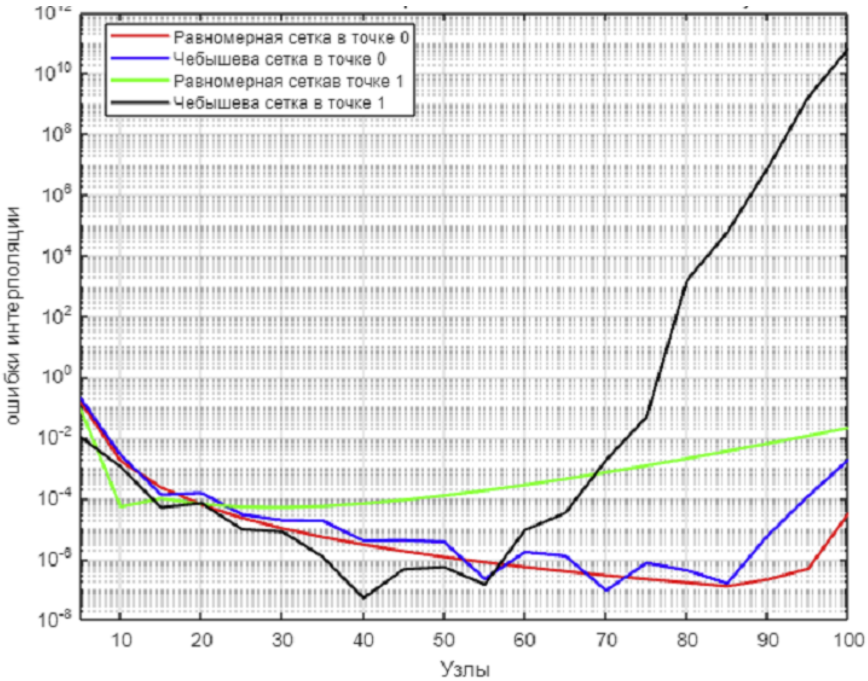

Рис. 11: Зависимость ошибки в выбранных точках 0 и 1 от количества узлов

7 Краткие выводы

1. Увеличение количества узлов сетки, на которой строится интерполяционный полином, не гарантирует снижение ошибки. Напротив, существуют функции, для которых ошибка увеличивается с увеличением количества узлов (например, функция Рунге).
2. Гладкость функции сильно влияет на точность построения интерполяционного полинома. Более гладкие функции приближаются интерполяционными полиномами гораздо точнее.
3. Для построения интерполяционного полинома лучше использовать сгущенную сетку, чем чебышевскую сетку и равномерную сетку.