

Санкт-Петербургский  
Политехнический университет Петра Великого

Отчет по лабораторной работе №12

**Решение задачи Коши для ОДУ 1 порядка методами  
Рунге-Кутты**  
Метод Кутты-Мерсона (5-ти этапный 4 порядка)

Студент:

Чинь Тхи Тху Хоай

Преподаватель:

Козлов Константин Николаевич

Группа:

5030102/20001

Санкт-Петербург  
2024

# Содержание

<b>1</b>	<b>Формулировка задания и её формализации</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Алгоритм методов и условия их применимости</b>	<b>2</b>
2.1	Метод Кутты-Мерсона (5-ти этапный 4 порядка) . . . . .	2
2.2	Условие применимости . . . . .	2
2.3	Алгоритм метода Кутты-Мерсона . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Тестовый пример с детальными расчетами для задачи малой размерности</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Подготовка контрольных тестов</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Модульная структура программы</b>	<b>4</b>
<b>6</b>	<b>Численный анализ решения задачи</b>	<b>5</b>
<b>7</b>	<b>Краткие выводы</b>	<b>8</b>

# 1 Формулировка задания и её формализации

Пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) первого порядка:

$$y' = f(x, y); a \leq x \leq b$$

Будем считать, что для данной задачи Коши выполняются все требования  $y(x_0) = y_0$ , обеспечивающие существование и единственность на отрезке  $[a, b]$  ее решение  $y = y(x)$ . Решить такое уравнение, то есть найти общее решение  $y = y(x, C)$  с тем, чтобы выделить из него интегральную кривую  $y = y(x)$ , проходящую через заданную точку  $(x_0, y_0)$  удастся лишь для некоторых специальных типов таких уравнений. В остальных случаях необходимо пользоваться приближенными способами решения задач.

В данной лабораторной работе необходимо решить следующую задачу Коши с методом Кутты-Мерсона:

$$\begin{cases} y' + y \cdot \tan(x) = \sec(x); 0 \leq x \leq 1.5 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

## 2 Алгоритм методов и условия их применимости

### 2.1 Метод Кутты-Мерсона (5-ти этапный 4 порядка)

Представим решение задачи Коши на промежутке  $[a; b]$  в виде:  $(h = \frac{b-a}{n})$

$$\begin{cases} \eta_1 = f(x_i, y_i) \\ \eta_2 = f(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{3}\eta_1) \\ \eta_3 = f(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{6}\eta_1 + \frac{h}{6}\eta_2) \\ \eta_4 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{8}\eta_1 + \frac{3h}{8}\eta_2) \\ \eta_5 = f(x_i + h, y_i + \frac{h}{2}\eta_1 - \frac{3h}{2}\eta_3 + 2h\eta_4) \end{cases} \quad (2)$$

Так, получить  $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(\eta_1 + 4\eta_4 + \eta_5)$

Условие выход:  $R = 0.2|2\eta_1 - 9\eta_3 + 8\eta_4 - \eta_5|\frac{h}{6} \leq \epsilon$

### 2.2 Условие применимости

Для того, чтобы алгоритм находил решения с нужной точностью, нужно чтобы выполнялись условия теоремы о существовании и единственности задачи Коши, то есть функции  $f(x, y)$  и  $f'_y(x, y)$  должны быть непрерывными на  $[a, b]$ ;

### 2.3 Алгоритм метода Кутты-Мерсона

1. Количество разбиение отрезка  $n = 1$
2. Вычисляем отрезки  $x_i = x_0 + i \cdot h$ , где  $x_0 = a$ ,  $h = \frac{b-a}{n}$ .
3. Цикл:  $i = 0$  до  $n-1$   
Вычислить  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5$   
Вычислить  $y_{i+1}$  по формуле  
Если  $R = 0.2|2\eta_1 - 9\eta_3 + 8\eta_4 - \eta_5|\frac{h}{6} \geq \epsilon$   
то  $n := 2n$  (если  $i = n-1$ ) и возвращаемся к пункту 2

### 3 Тестовый пример с детальными расчетами для задачи малой размерности

Дано:  $\begin{cases} y' + y \operatorname{tg}(x) = \sec(x) & , x \in [0, 1.5] \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Точное решение:  $y = \sin x + \cos x$ ,

$n = 2$ ,  $h = \frac{b-a}{n} = 0.75$ ;  $f(x, y) = \sec(x) - y \operatorname{tg}(x)$

1)  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$

$\Rightarrow y_1 = 1.474$

$x_1 = 0.75$

$$\begin{cases} \pi_1 = f(0; 1) = 1 \\ \pi_2 = f(0.25; 1.25) = 0.7129 \\ \pi_3 = f(0.25; 1.21) = 0.722 \\ \pi_4 = f(0.375; 1.29) = 0.565 \\ \pi_5 = f(0.75; 1.41) = 0.529 \end{cases}$$

2)  $\begin{cases} \pi_1 = f(0.75, 1.474) = -0.006 \\ \pi_2 = f(1; 1.4725) = -0.4425 \\ \pi_3 = f(1; 1.418) = -0.357 \\ \pi_4 = f(1.125; 1.3489) = -0.5036 \\ \pi_5 = f(1.5; 1.1179) = -1.628 \end{cases}$

$\Rightarrow x_2 = 1.5$

$y_2 = 1.0112$

$x_i$	$y_i$	точное $\bar{y}_i$	$ \bar{y}_i - y_i $
0.75	1.474	1.4133	0.0607
1.5	1.0112	1.068	0.057

## 4 Подготовка контрольных тестов

Для исследования работы метода, выбрать  $n = 4$ ,  $n = 8$ , чтобы построить графики точного и численных решений для двух фиксированных значений шага на отрезке и график ошибки на отрезке для этих решений.

Для исследования зависимости фактической ошибки от заданной точности и фактической ошибки от фиксированного шага интегрирования по методу Кутты-Мерсона (5-ти этапный 4 порядка) для задачи Коши:  $y' + y \tan(x) = \sec(x)$ ,  $y(0) = 1$  на отрезке  $[0, 1.5]$ , мы выбрали  $\epsilon = [10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}, 10^{-9}]$

Выбрать нежесткую систему с матрицей  $5 \times 5$ :

$$A = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{pmatrix}$$

## 5 Модульная структура программы

- `double Func(double x, double y)`: Возвращает значение функции  $f(x) = \sec(x) - y \tan(x)$  в точке  $(x, y)$
- `double Exact(double x)`: Возвращает точное решение  $y = \sin(x) + \cos(x)$  в точке  $x$
- `double kuttaMerson(double a, double y0, double b, int *n, double (*Func)(double x, double y), double epsilon)`: Возвращает фактическая ошибка для достижения заданной точности по методу Кутты-Мерсона на  $[a, b]$
- `void kuttaMersonSystem(double a, double y0[], double b, double h)` для решения систем ОДУ с матрицей  $A$

## 6 Численный анализ решения задачи

Задача Коши:  $y' + y \tan(x) = \sec(x)$ ,  $y(0) = 1$  на  $[0, 1.5]$

- Построить графики точного и численных решений для двух фиксированных значений шага  $n = 4$  ( $h = 0.375$ ),  $n = 8$  ( $h = 0.1875$ ) на отрезке  $[0, 1.5]$

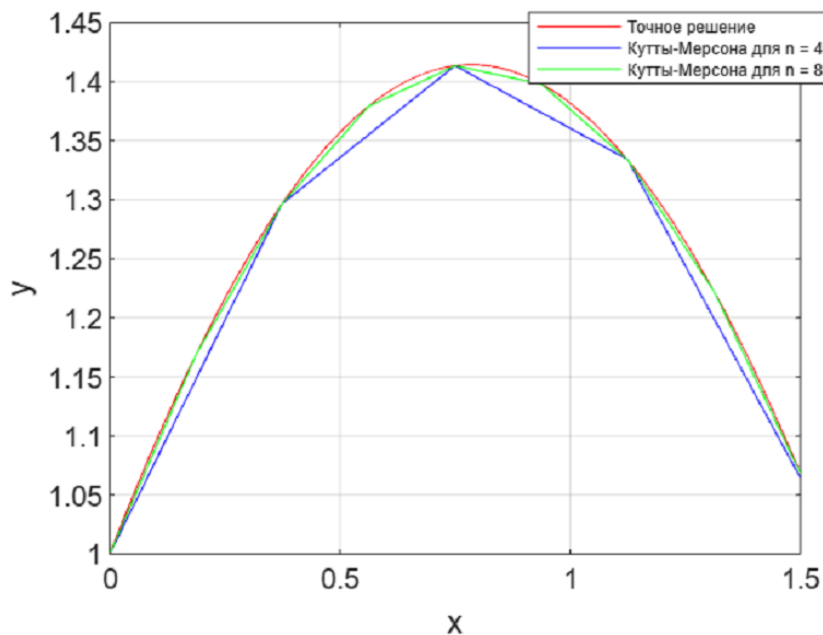


Рис. 1: графики точного и численных решений для двух фиксированных значений шага  $n = 4$ ,  $n = 8$

- Построить график ошибки на отрезке для этих решений  $n = 4$ ,  $n = 8$ .

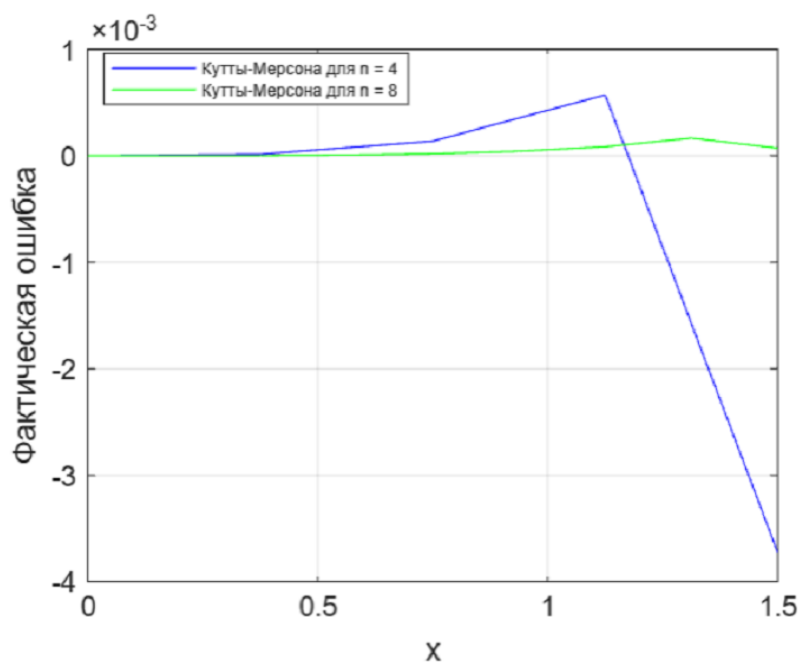


Рис. 2: График ошибки на отрезке для этих решений.

- Построить график изменения шага по отрезку

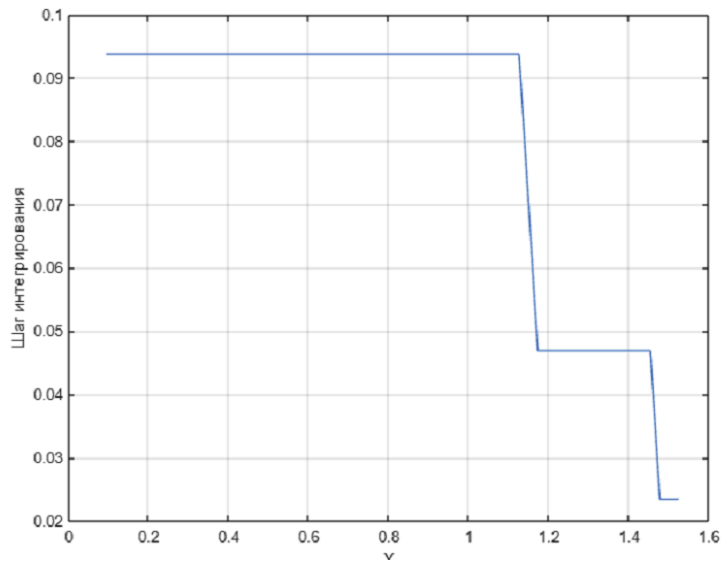


Рис. 3: График изменения шага по отрезку

- Построить график зависимости фактической погрешности от заданной точности

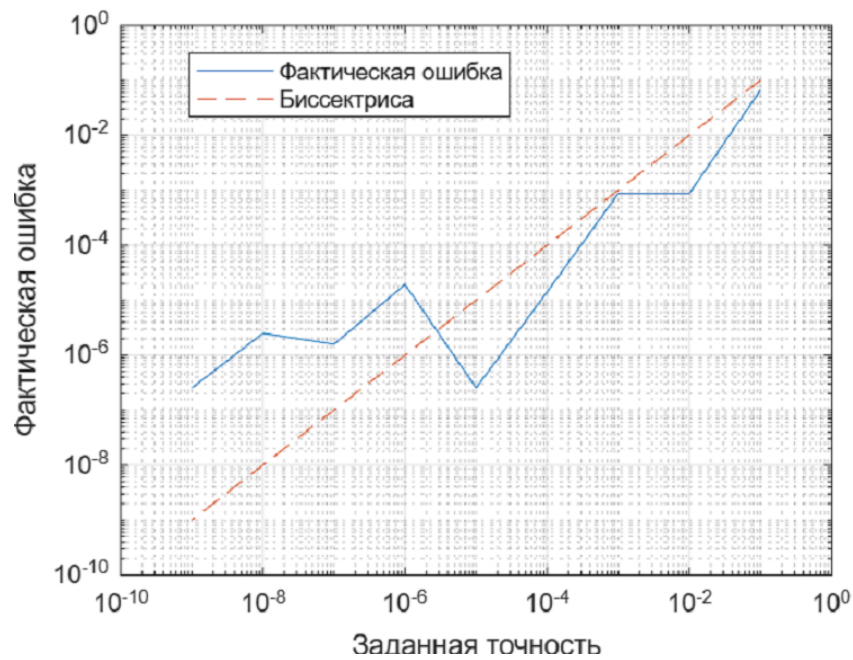


Рис. 4: График зависимости фактической погрешности от заданной точности

- Построить график зависимости фактической погрешности от заданной точности.

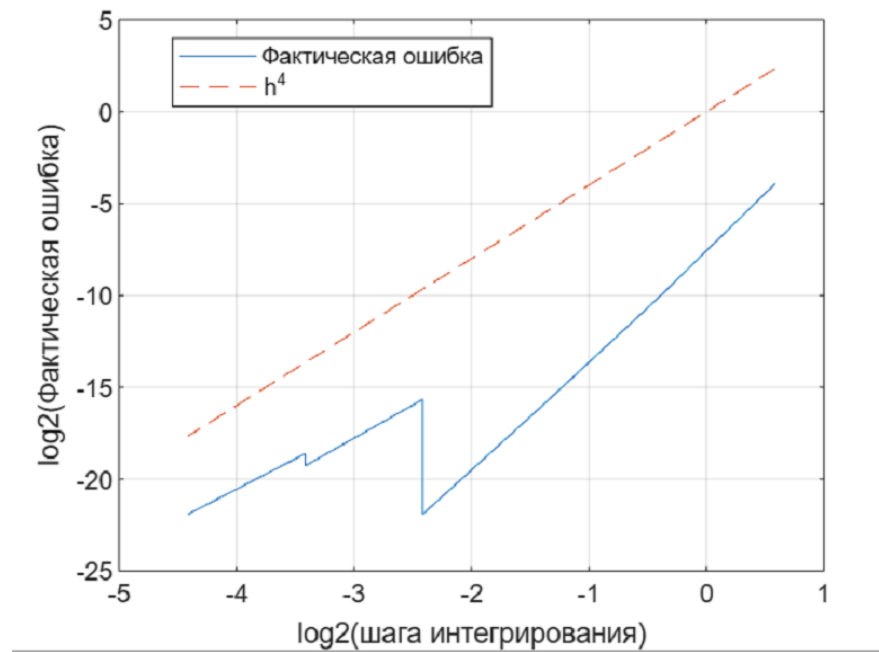


Рис. 5: График зависимости фактической погрешности от заданной точности

По графику определить порядок точности применяемой формулы  $k = 3.34$  меньше 4, возможно, из-за проверки  $y_i$  с шагом  $h$  по сравнению с  $y_i$  с шагом  $h/2$

- Построить графики численных решений для двух значений шага для нежесткой системы ОДУ

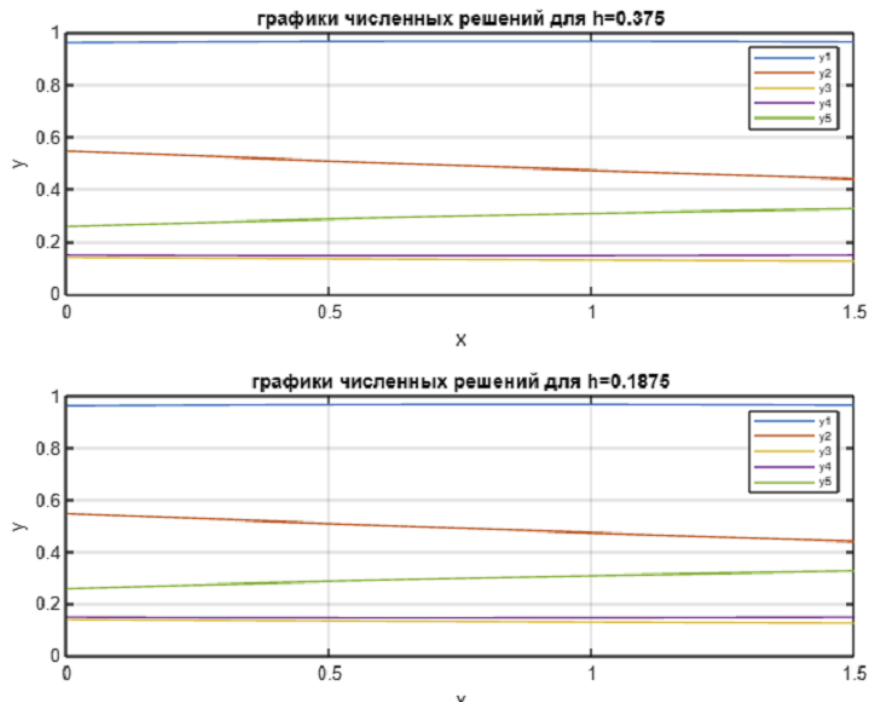


Рис. 6: График численных решений для двух значений шага

Работоспособность программы решения системы ОДУ довольно хорошая.



## 7 Краткие выводы

1. Исправленный метод Кутты-Мерсона, относящийся к группе методов 4-го порядка, прост в реализации и гарантированно может найти решение с заданной точностью.
2. При увеличении заданной точности, фактической погрешности и шага интегрирования будут также увеличиваться.
3. Использование логарифмического масштаба по основанию 2 позволяет четко увидеть зависимость фактической ошибки от длины отрезка разбиения. Анализ наклона линии на графике позволяет определить порядок точности применяемой формулы  $k = 4$