Санкт-Петербургский
Политехнический университет Петра Великого

Отчет по лабораторной работе №9

Приближение табличных функций сплайнами и МНК
Кубический сплайн с граничными условиями на первую производную

Студент:	Чинь Тхи Тху Хоай
Преподаватель:	Козлов Константин Николаувич
Группа:	5030102/20001

Санкт-Петербург
2024

Содержание

1 Формулировка задания и её формализации **2**

2 Алгоритм методов и условия их применимости **2**

2.1 Построение сетки 2

2.2 Построение кубического сплайна с граничными условиями на первую производную 2

2.2.1 Алгоритм 2

2.2.2 Условие применимости 3

3 Тестовый пример с детальными расчетами для задачи малой размерности **4**

4 Подготовка контрольных тестов **5**

5 Модульная структура программы **5**

6 Численный анализ решения задачи **6**

6.1 функции $y = th(x)$, [a,b] = [-3,3] 6

6.2 функции $y = 3\text{sign}(x)x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$, [a,b] = [-1, 1.5] 9

7 Краткие выводы **12**

7.1 Сравнение с результатами первой работы 12

7.2 Выводы 12

1 Формулировка задания и её формализации

Кубические сплайны являются одним из наиболее популярных методов интерполяции, поскольку они обеспечивают гладкую и эффективную аппроксимацию данных. Этот лаб требуется аппроксимировать функцию с помощью метод кубический сплайн с граничными условиями на первую производную для заданных функций на некотором отрезке [a,b], используя равномерную сетку в окрестности выбранной точки. Для этих полиномов исследовать зависимость ошибки функции от количества узлов в сетке и при возмущении данных.

2 Алгоритм методов и условия их применимости

2.1 Построение сетки

Равномерная сетки
Пусть задан отрезок $[a, b]$ и n точек на этом отрезке
Равномерная сетка $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ тогда записывается так:
$x_i = x_0 + ih$, где $i = 0, ..., n$; $x_0 = a; h = \frac{b-a}{h}$

2.2 Построение кубического сплайна с граничными условиями на первую производную

2.2.1 Алгоритм

Дано: Некоторая сетка $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ и сеточная функция $\{f_i\}_{i=0}^{n}$ от таблично заданной функции, для которой требуется построить кубический сплайн с граничными условиями на первую производную.

$$S_3^1(x) = \begin{cases} a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 & \text{для } x \in [x_0, x_1] \\ a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 & \text{для } x \in [x_1, x_2] \\ ... \\ a_nx^3 + b_nx^2 + c_nx + d_n & \text{для } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

$g(x) := S_3^1(x)$ и $g_i(x) := S_3^1(x)|_{[x_{i-1}, x_i]}$
$M_i := g"(x_i)$, i =0,1,.., n
$h_i = x_i - x_{i-1}$
$g_i(x) = M_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i} + (\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1}) + y_{i-1} - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6}$
Тогда, получить систему:

$$\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}M_{i-1} + 2M_i + \frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}M_{i+1} = \frac{6}{h_i+h_{i+1}}(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}), \text{ i=1,...,n-1}$$

Граничные условие на первую производную:

$$\begin{cases} g'(a) = f'(a) \\ g'(b) = f'(b) \end{cases}$$

Так, $\begin{cases} -\frac{h_1}{3}M_0 - \frac{h_1}{6}M_1 = f'(a) - \frac{y_1-y_0}{h_1} \\ \frac{h_n}{6}M_{n-1} + \frac{h_n}{3}M_n = f'(b) - \frac{y_n-y_{n-1}}{h_n} \end{cases}$

Так, из системы n+1 уравнения n+1 переменны ,найти все M_i (трёхдиаголная матрица)

2.2.2 Условие применимости

1)$\forall i, j \ i \neq j, x_i \neq x_j$, то есть все узлы сетки должны быть попарно различны.

2)$g_i(x) \in C^2([a, b])$, i = 1,...,n

3 Тестовый пример с детальными расчетами для задачи малой размерности

Дано: $f(x) = x \ln(x+1)$ на $[1,4]$

Равномерная сетка

x	1	2	3	4
y	0,693	2,197	4,159	6,438

$h_i = 1$, $i = 1,2,3$

$$g_i(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1})\right)(x - x_{i-1}) + y_{i-1} - M_{i-1}\cdot\frac{h_i^2}{6}$$

Граничные условия на первую производную

$$\begin{cases} g'(1) = f'(1) = 1,193 \\ g'(4) = f'(4) = 2,409 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{h_1}{3}M_0 - \frac{h_1}{6}M_1 = f'(1) - \frac{y_1 - y_0}{h_1} \\ \frac{h_n}{6}M_{n-1} + \frac{h_n M_n}{3} = f'(4) - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \end{cases}$$

$$\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}M_{i-1} + 2M_i + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}M_{i+1} = \frac{6}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right)$$

Получается систему

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}M_0 - \frac{1}{6}M_1 = -0,311 \\ 0,5M_0 + 2M_1 + 0,5M_2 = 1,374 \\ 0,5M_1 + 2M_2 + 0,5M_3 = 0,951 \\ \frac{1}{6}M_2 + \frac{M_3}{3} = 0,13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M_0 = 0,718 \\ M_1 = 0,430 \\ M_2 = 0,309 \\ M_3 = 0,235 \end{cases}$$

$$S_3^1(x) = \begin{cases} -0,048x^3 + 0,503x^2 + 0,331x - 0,093, & x \in [1,2] \\ -0,02x^3 + 0,336x^2 + 0,665x - 0,316, & x \in [2,3] \\ -0,012x^3 + 0,2655x^2 + 0,8765x - 0,527, & x \in [3,4] \end{cases}$$

Ошибки вычислений: $R_n(x) = y - P_n(x)$

x	1,5	2,5	3,5
$R_n(x)$	0,001	0,002	0,014

4 Подготовка контрольных тестов

Для исследования влияния количества узлов на сходимость интерполяционного процесса построим интерполяционный полином для двух функций: $y = th(x)$ на отрезке [-3, 3] и $y = 3\text{sign.}(x)x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$ на отрезке [-1, 1.5] для равномерной сетки на 5,7 и 10 узлах и построим графики этих интерполяционных полиномов с помощью средств пакета MATLAB.
После «наглядных» результатов, построим график ошибок, то есть график модуля разности между значением функции в точке и значением интерполяционного полинома в этой же точке.
Для исследования зависимость ошибки интерполяции и ошибки в выбранных точках 0 от количества узлов, выбрать размер сетки 10:5:100 и найти ошибки.
Зависимость ошибки интерполяции при возмущении данных. В значение функции в точках сетки для построения полинома вносятся возмущения максимальной величины 1%, 2%, 3%, 4%, 5%. Эксперимент выполняется 20 раз, строится график типа боксплот, по оси x среднее фактическое возмущение данных в эксперименте.

5 Модульная структура программы

- struct CubicSpline: Полином для каждого отрезок

- double* EquallySpaced(double a, double b, int node): Строит равномерную сетку на узлах размера node на отрезке [a,b]

- void FindCubicSplines(CubicSpline* splines, int n, double *xk, double *yk, double dfa, double dfb): Найти коэффициенты для кубического сплайны с граничными условиями $g'(a) = dfa, g'(b) = dfb$

- double cubicSplineInterpolate(CubicSpline* splines, int n, double x): Найти значения в точке x

- double Func1(double x): Возвращает значение функции $y = th(x)$ в точке x

- double Func2(double x): Возвращает значение функции $y = 3\text{sign}(x)x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$ в точке x

6 Численный анализ решения задачи

6.1 функции $y = th(x)$, [a,b] = [-3,3]

- Построить интерполяция функции y = th(x) для равномерной сетки для размер сетки node = [5,7,10]

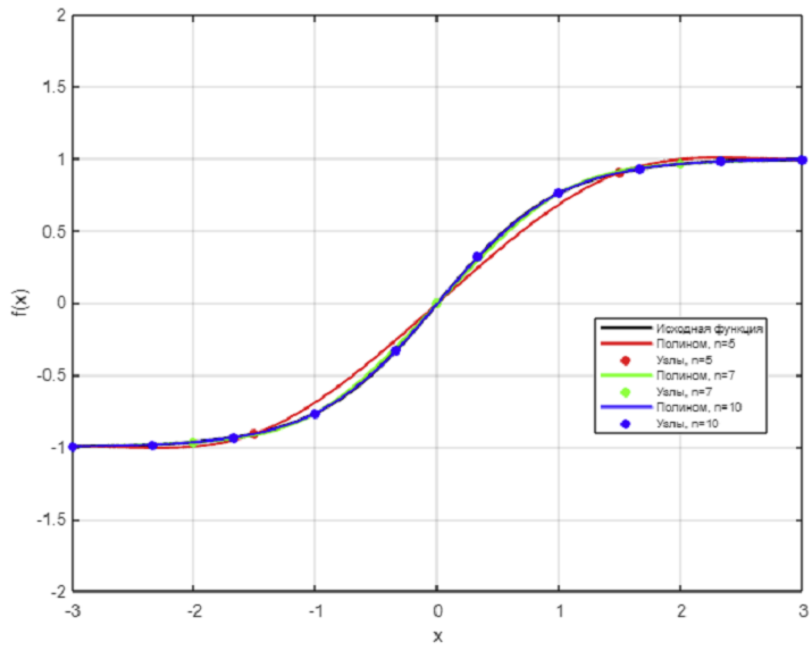

Рис. 1: Интерполяция функции y = th(x) для размер сетки node = [5,7,10]'

- Построить функции поточечной ошибки функции y= th(x) для размер сетки [5,7,10]

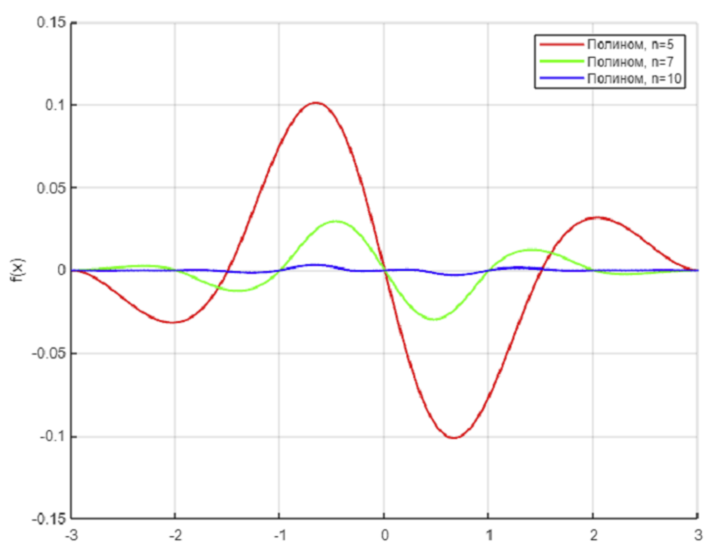

Рис. 2: Функции поточечной ошибки функции y= th(x) для размер сетки node = [5,7,10]

- Построить зависимость ошибки интерполяции функции y= th(x) от количества узлов
  a) Узлы 10:5:100

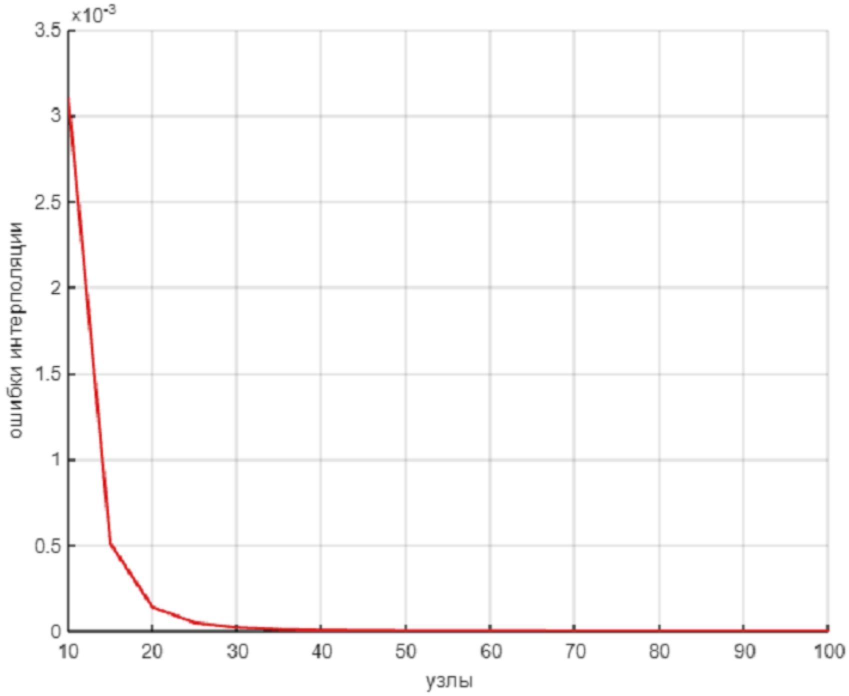

Рис. 3: Зависимость ошибки интерполяции функции y= th(x) от количества узлов

  b) Узлы 35:5:100

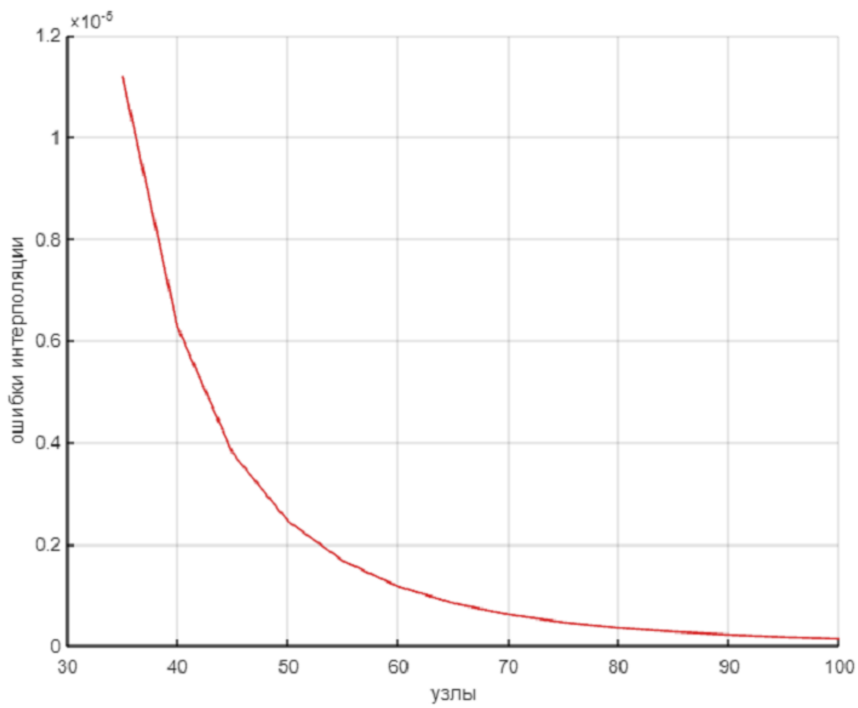

Рис. 4: Зависимость ошибки интерполяции функции y= th(x) от количества узлов

- Построить график зависимости максимальной ошибки от значения производной на краях отрезка a для 10 узлов, f'(a) = 0.0099

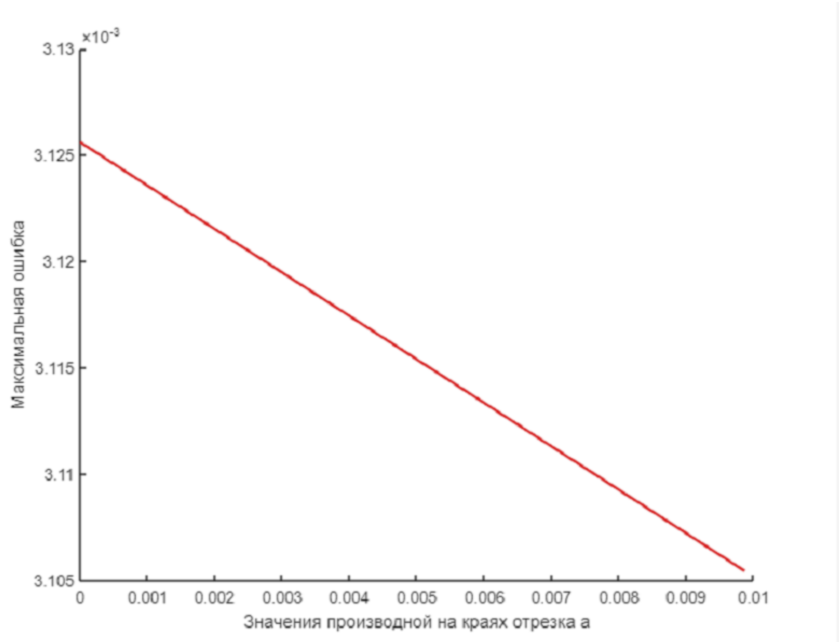

Рис. 5: Зависимость максимальной ошибки от значения производной на краях отрезка

- Построить график зависимости ошибки интерполяции при возмущении данных для 10 узлов

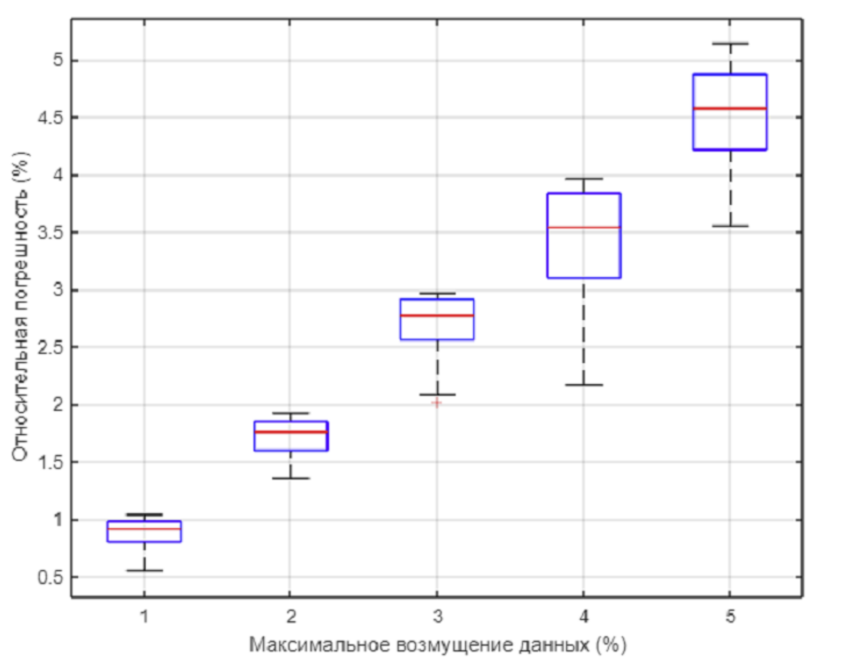

Рис. 6: Зависимостьошибки интерполяции при возмущении данных

6.2 функции $y = 3\mathbf{sign}(x)x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$, [a,b] = [-1, 1.5]

- Построить интерполяция функции $y = 3\mathrm{sign}(x)x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$ для равномерной сетки для размер сетки node = [5,7,10]

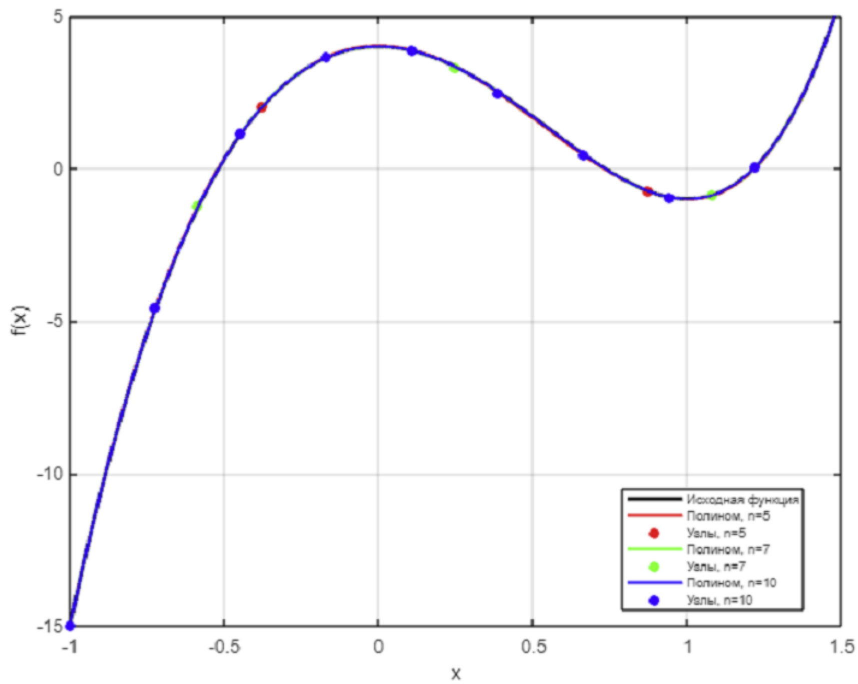

Рис. 7: Интерполяция функции $y = 3\mathrm{sign}(x)x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$ для азмер сетки [5,7,10]'

- Построить функции поточечной ошибки функции $y = 3\mathrm{sign}(x)x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$ для размер сетки [5,7,10]

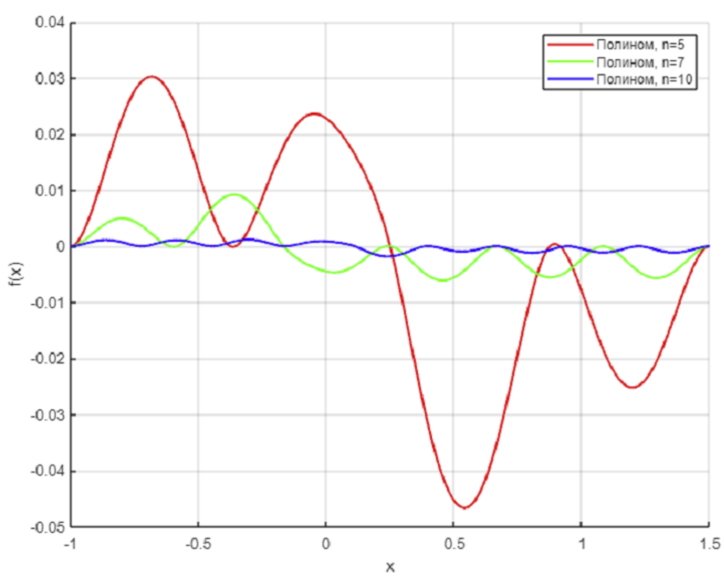

Рис. 8: Функции поточечной ошибки функции $y = 3\mathrm{sign}(x)x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$ для размер сетки node = [5,7,10]

- Построить зависимость ошибки интерполяции функции $y = 3\mathrm{sign}(x)x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$ от количества узлов

  a) Узлы 10:5:100

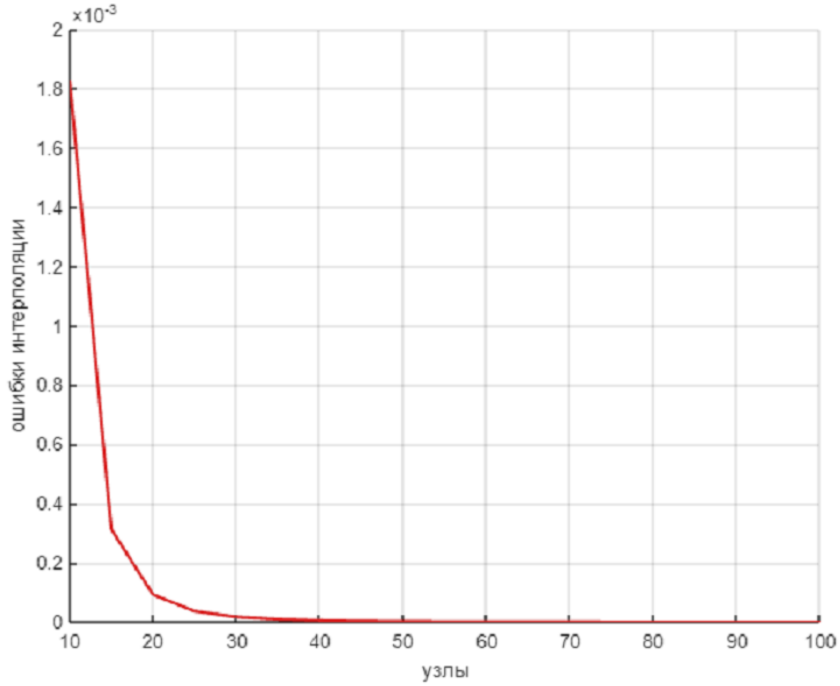

Рис. 9: Зависимость ошибки интерполяции функции $y = 3\mathrm{sign}(x)x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$ от количества узлов

  b) Узлы 35:5:100

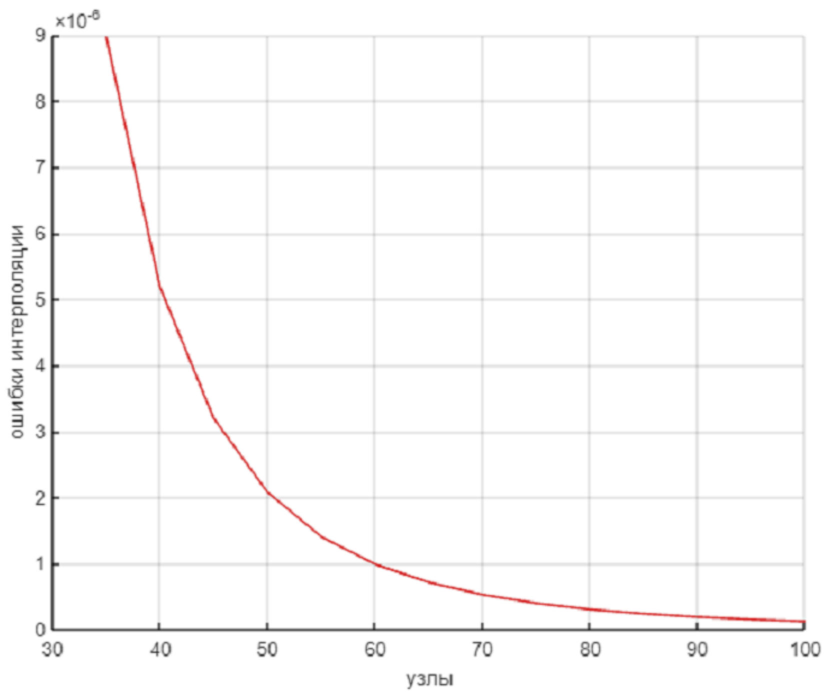

Рис. 10: Зависимость ошибки интерполяции функции $y = 3\mathrm{sign}(x)x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$ от количества узлов

- Построить график зависимости максимальной ошибки от значения производной на краях отрезка a для 10 узлов, f'(a) = 48

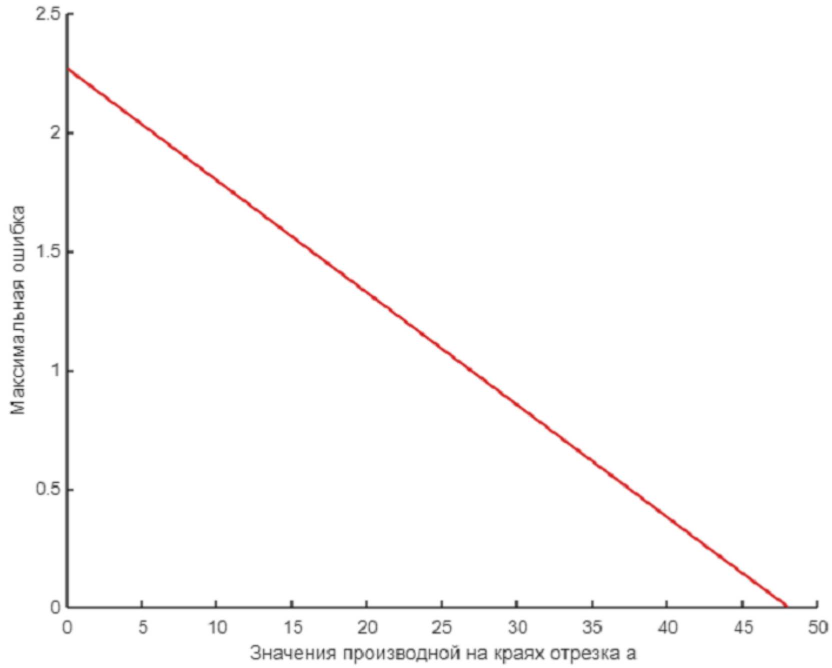

Рис. 11: Зависимость максимальной ошибки от значения производной на краях отрезка

- Построить график зависимости ошибки интерполяции при возмущении данных для 10 узлов

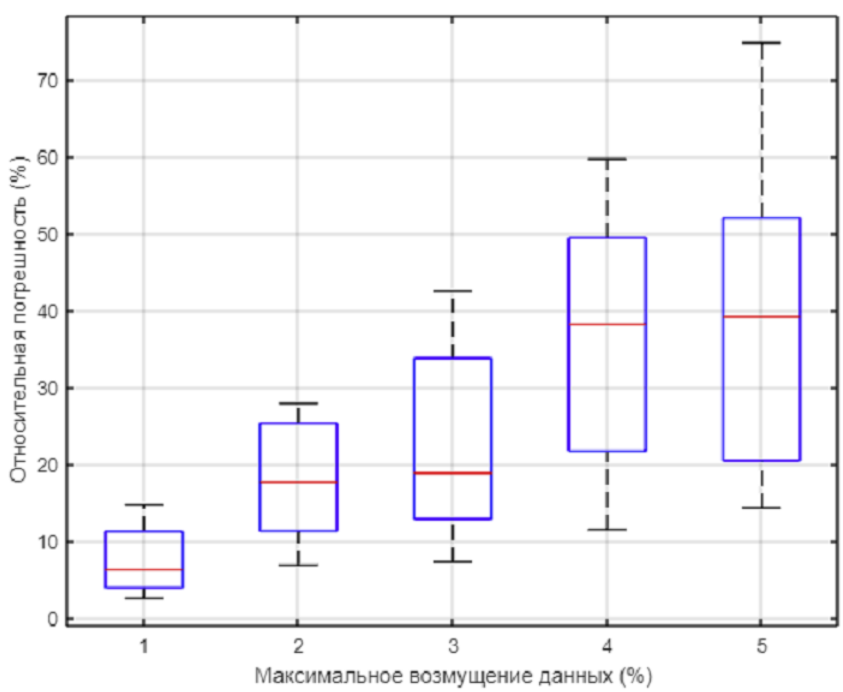

Рис. 12: Зависимостьошибки интерполяции при возмущении данных

7 Краткие выводы

7.1 Сравнение с результатами первой работы

1. Число узлов и их возмущении точно также влияет на устойчивость метода кубический сплайн с граничными условиями на первую производную, как и на интерполирование интерполяционным полиномом Ньютона.
2. С увеличением числа узлов погрешность уменшивается. Однако можно заметить, что ошибка в полиноме, построенному по сплайне, распределена более равномерно, чем в интерполяционном полиноме Ньютона.

7.2 Выводы

1. Увеличение количества узлов интерполяции обычно приводит к уменьшению ошибки интерполяции на всем интервале. Однако, это также может привести к повышенной вычислительной сложности и проблемам с численной стабильностью, особенно при очень большом количестве узлов.
2.Выбор краевых условий для кубических сплайнов влияет на точность аппроксимации, особенно вблизи краев интервала.
3. Кубические сплайны достаточно чувствительны к шуму в данных. Возмущения в значениях функции могут привести к значительному изменению формы сплайна. Это особенно заметно при высоких уровнях шума или возмущений.