Санкт-Петербургский
Политехнический университет Петра Великого

Отчет по лабораторной работе №13

Решение задачи Коши для ОДУ 1 порядка методами Адамса

Метод (экстраполяционный) Адамса-Башфорта 4 порядк

Студент: Чинь Тхи Тху Хоай
Преподаватель: Козлов Константин Николаувич

Группа: 5030102/20001

Санкт-Петербург
2024

Содержание

1 Формулировка задания и её формализации

Пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) первого порядка:
$y' = f(x, y); a \leq x \leq b$
Будем считать, что для данной задачи Коши выполняются все требования $y(x_0) = y_0$, обеспечивающие существование и единственность на отрезке [a, b] ее решение y = y(x). Решить такое уравнение, то есть найти общее решение y = y(x,C) с тем, чтобы выделить из него интегральную кривую y=y(x), проходящую через заданную точку (x_0, y_0) удается лишь для некоторых специальных типов таких уравнений. В остальных случаях необходимо пользоваться приближенными способами решения задач.

В данной лабораторной работе необходимо решить следующую задачу Коши с методом Адамса-Башфорта 4 порядк:

$$\begin{cases} y' + y.tg(x) = sec(x); 0 \leq x \leq 1.5 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

2 Алгоритм методов и условия их применимости

2.1 Метод Адамса-Башфорта 4 порядк

Представим решение задачи Коши на промежутке [a; b] в виде:

$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx$

Так, получить $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3})$

2.2 Условие применимости

Для того, чтобы алгоритм находил решения с нужной точностью, нужно чтобы выполнялись условия теоремы о существовании и единственности задачи Коши, то есть функции f(x,y) и f'_y(x,y) должны быть непрерывными на [a, b];

2.3 Алгоритм метода Адамса-Башфорта 4 порядк

1. Количество разбиение отрезка n = 1
2. Вычисляем отрезки $x_i = x_0 + i \cdot h$, где $x_0 = a$, $h = \frac{b-a}{n}$.
3. Вычислите первые четыре члена, используя метод Кутты-Мерсона 4. Цилк: i = 3 до n-1
Вычислить y_{i+1} по формуле

Если $\frac{|y_{i+1} - y_i|}{15} \geq \epsilon$

то n := 2n , h = h/2 (если i= n-1) и возвращаемся к пункту 2

3 Тестовый пример с детальными расчетами для задачи малой размерности

Дано: $\begin{cases} y' + y\,tg(x) = sec(x), & x \in [0, 1.5] \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Точное решение: $y = \sin x + \cos x$

$n=8$, $h = \frac{b-a}{n} = 0.1875$;

$f(x,y) = sec(x) - y \cdot tg(x)$

1) Из метод ~~Кут~~ Кутты-Мерсона

$x_0 = 0$, $y_0 = 1$

$x_1 = 0.1875$, $y_1 = 1.66$

$x_2 = 0.375$, $y_2 = 1.762$

$x_3 = 0.5625$, $y_3 = 1.802$

2) Метод Адамса-Башфорта 4 порядок

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{24}\left(55 \cdot f(0{,}5625; 1{,}802) - 59 \cdot f(0{,}375; 1{,}762) + 37 f(0{,}1875; 1{,}66) - 9 \cdot f(0,1)\right) = 1{,}78$$

$$y_5 = y_4 + \frac{h}{24}\left(55 \cdot f(0{,}75; 1{,}78) - 59 f(0{,}5625; 1{,}802) + 37 f(0{,}375; 1{,}762) - 9 \cdot f(0{,}1875; 1{,}66)\right) = 1{,}694$$

$$y_6 = y_5 + \frac{h}{24}\left(55 \cdot f(0{,}9375; 1{,}694) - 59 f(0{,}75; 1{,}78) + 37 f(0{,}5625; 1{,}802) - 9 \cdot f(0{,}375; 1{,}762)\right) = 1{,}55$$

$y_7 = 1{,}35$

$y_8 = 1{,}105$

x	0,75	0,9375	1,125	1,3125	1,5
$\lvert y - \bar{y} \rvert$	0,37	0,296	0,217	0,127	0,037

4 Подготовка контрольных тестов

Для исследования работы метода, выбрать n = 4, n = 8 , чтобы построить графики точного и численных решений для двух фиксированных значений шага на отрезке и график ошибки на отрезке для этих решений.

Для исследования зависимости фактической ошибки от заданной точности и фактической ошибки от фиксированного шага интегрирования по методуАдамса-Башфорта 4 порядк дпя задачи Коши: $y' + ytan(x) = sec(x)$, y(0) = 1 на отрезке [0, 1.5] , мы выбрали $\epsilon = [10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}, 10^{-9}]$

Вычислите 20-кратную ошибку с возмущения $1\%, 2\%, 3\%, 4\%, 5\%$, а затем постройте график boxplot зависимости относительной ошибки от возмущения.

5 Модульная структура программы

- double Func(double x, double y): Возвращает значение функции $f(x) = sec(x) - ytan(x)$ в точке (x,y)
- double Exact(double x): Возвращает точное решение $y = sin(x) + cos(x)$ в точке x
- void kuttaMerson(double x0, double y0, double h, double y[4]) : Возвращает первые четыре члена, используя метод Кутты-Мерсона.
- double AdamsBashforth4(double a, double y0, double b, double epsilon, double *k): Возвращает фактическая ошибка для достижения заданной точности по методу Адамса-Башфорта 4 порядк на [a,b]

6 Численный анализ решения задачи

Задача Коши: $y' + ytan(x) = sec(x)$, y(0) = 1 на [0, 1.5]

- Построить графики точного и численных решений для двух фиксированных значений шага n = 4 (h = 0.375), n = 8 (h = 0.1875) на отрезке[0, 1.5]

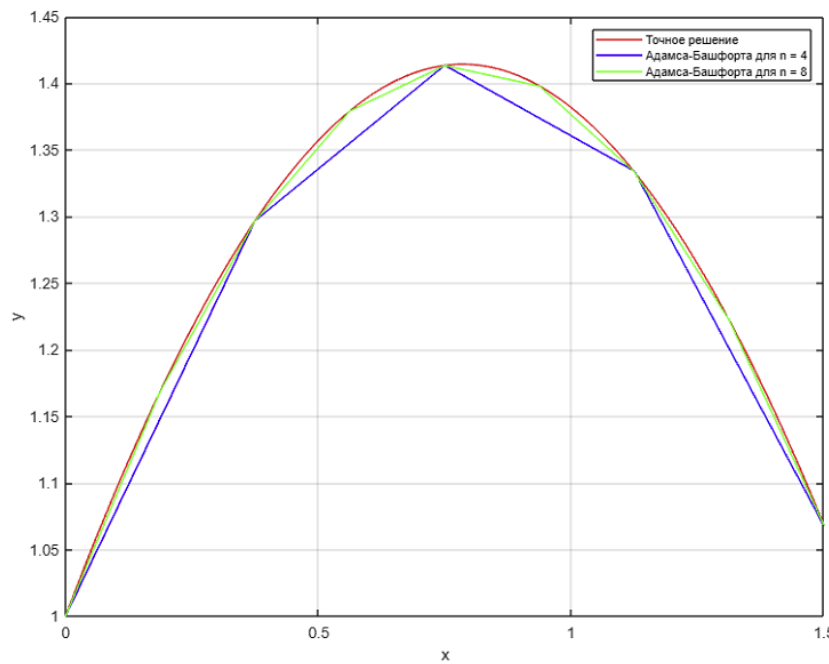

Рис. 1: графики точного и численных решений для двух фиксированных значений шага n = 4, n =8

- Построить график ошибки на отрезке для этих решени n =4, n=8.

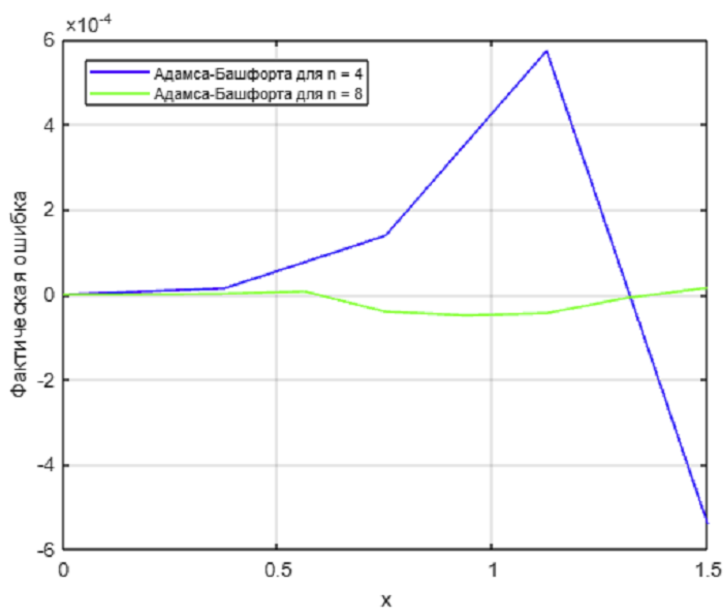

Рис. 2: График ошибки на отрезке для этих решений.

- Построить график изменения шага от заданной точности

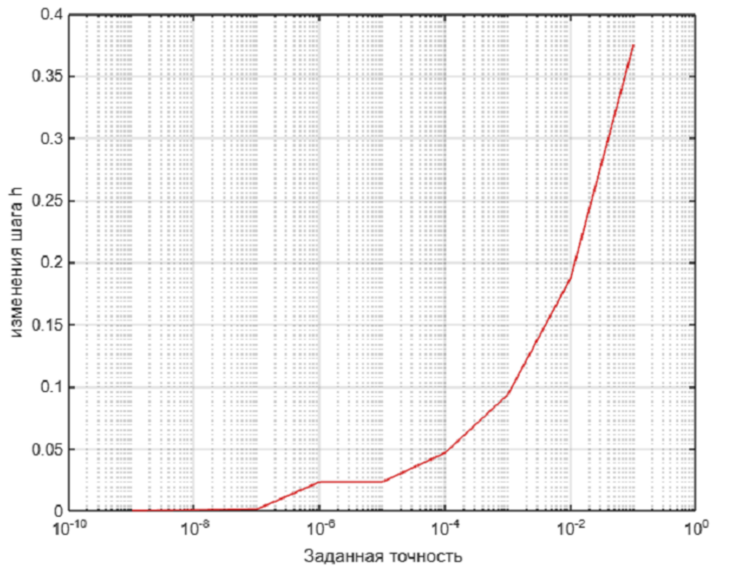

Рис. 3: График изменения шага от заданной точности

- Построить график зависимости фактической погрешности от заданной точности

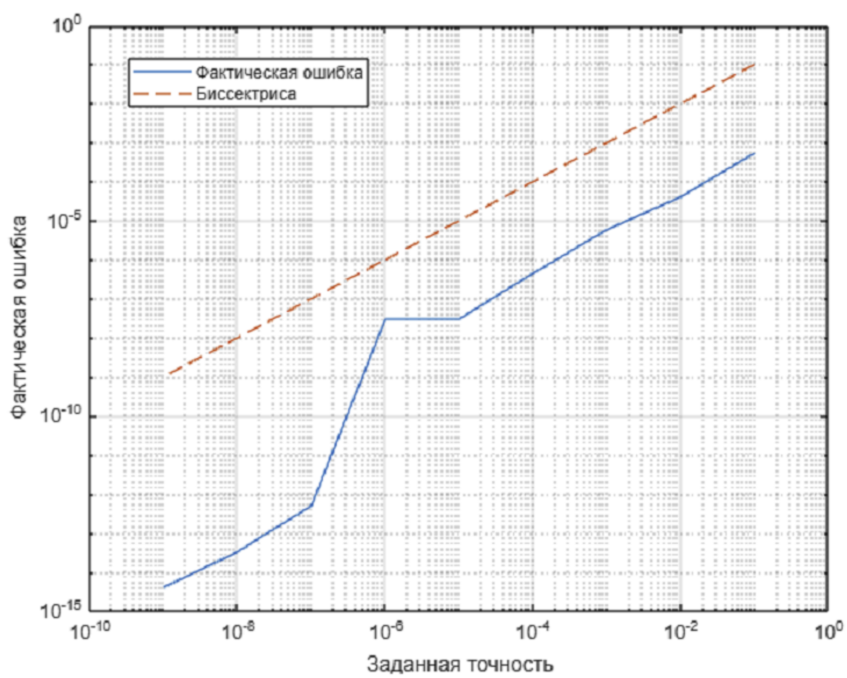

Рис. 4: График зависимости фактической погрешности от заданной точности

- Построить график зависимости фактической погрешности от заданной точности.

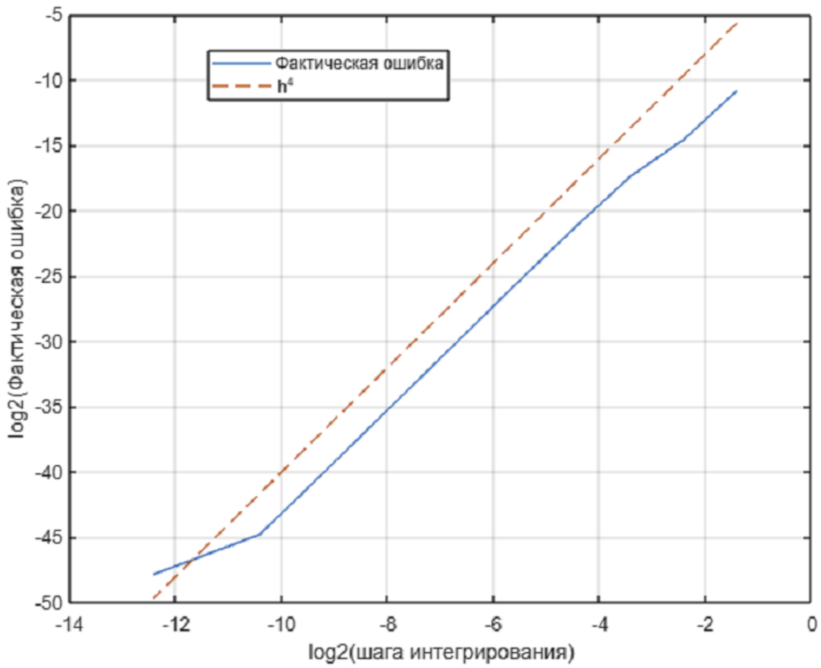

Рис. 5: График зависимости фактической погрешности от заданной точности

По графику определить порядок точности применяемой формулы k = 3.948 мало чем отличающуюся от теоретического порядок точности k = 4

- Построить графики зависимости относительной ошибки от возмущения

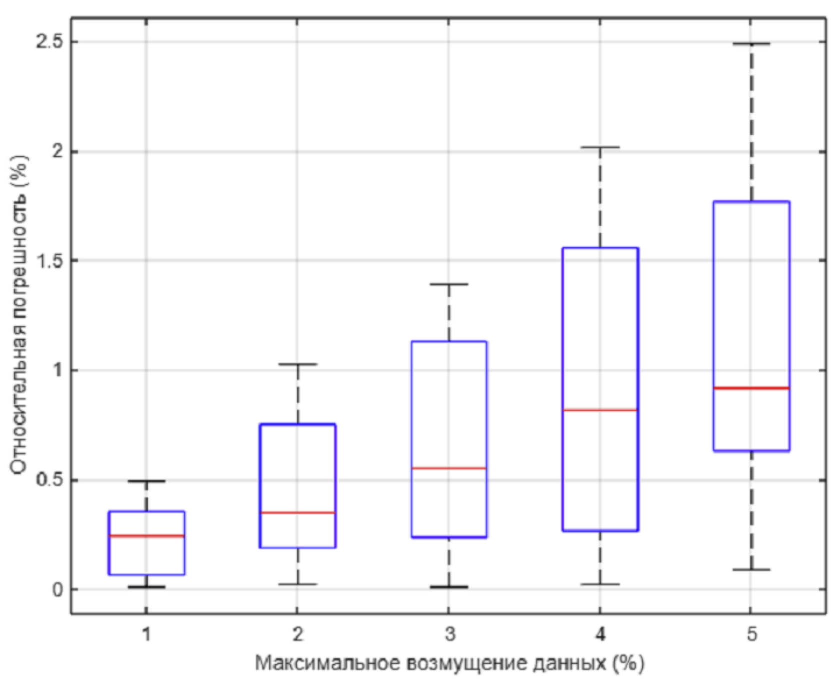

Рис. 6: График зависимости относительной ошибки от возмущения

7 Краткие выводы

1. Исправленный метод Адамса-Башфорта, относящийся к группе методов 4-го порядка, прост в реализации и гарантированно может найти решение с заданной точностью.
2. При увеличении заданной точности, фактической погрешности и шага интегрирования будут также увеличиваться.
3.Использование логарифмического масштаба по основанию 2 позволяет четко увидеть зависимость фактической ошибки от длины отрезка разбиения. Анализ наклона линии на графике позволяет определить порядок точности применяемой формулы k = 4
4.Точность методов Адамса в значительной степени зависит от корректности начальных условий. Возмущения в начальных значениях могут привести к значительным отклонениям в полученном численном решении по сравнению с точным решением ОДУ.