Санкт-Петербургский
Политехнический университет Петра Великого

Отчет по лабораторной работе №14

Решение краевой задачи для ОДУ 2-ого порядка
Метод пристрелки

Студент:	Чинь Тхи Тху Хоай
Преподаватель:	Козлов Константин Николаувич
Группа:	5030102/20001

Санкт-Петербург
2024

Содержание

1 Формулировка задания и её формализации

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение 2-ого порядка с переменными коэффициентами:
p(x)y"+ q(x)y' + r(x)y = f(x), x $\in [a, b]$
p(x), q(x), r(x), f(x) $\in C([a, b])$
Так как задача краевая, то д.у. дополняется граничными условиями:
Общий вид граничных условий:

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \beta_0 y(a) + \beta_1 y'(b) = B \end{cases} \tag{1}$$

$\alpha_0^2 + \alpha_1^0 \neq 0, \beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$ - условия невырождены Таким образом краевая задача для д.у. 2-ого порядка состоит из (1), (2) и $x \in [a, b]$
В данной лабораторной дано дифференицеальное уравнение 2-ого порядка
$y" + xy' - \frac{2}{cos^2(x)} y = xsec^2(x)$
рассматривается отрезок [0, 1].
Необходимо решить следующую краевую задачу с помощью метода пристрелки:

$$\begin{cases} y" + xy' - \frac{2}{cos^2(x)} y = x.sec^2(x) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1.557 \end{cases} \tag{2}$$

Также дано точное решение: y = tan(x)

1.1 Метод пристрелки

Поставить z = y', так y" = z
Получить систему:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = x.sec^2(x) + \frac{2}{cos^2(x)} y - xz \\ y(0) = 0 = A \\ y(1) = 1.557 = B \end{cases} \tag{3}$$

Сначала, выбрать z(a) = C1 и использовать метод Курты-Мерсон вычислить $y_1(b)$, $g_1 = B - y_1(b)$
И выбрать ещё z(a) = C2 $\neq C1$ и использовать метод Курты-Мерсон вычислить $y_2(b)$, $g_2 = B - y_2(b)$
Если $|y_2(b) - B| > \epsilon$, изменить $C3 = C2 - g_2 \frac{C2-C1}{g_2-g_1}$ (метод секущей)
Повторите, чтобы точно отрегулировать С.

1.2 Условие применимости

$p(x), q(x), r(x), f(x) \in C([a, b])$

1.3 Алгоритм метода пристрелки

1. Выбрать z(a) = C1 = -1.0, и вычислить $y_1(b), g_1$ по методу Курты-Мерсон
2. Выбрать z(a) = C2 = 0, и вычислить $y_2(b), g_2$ по методу Курты-Мерсон
3. Если $|y_2(b) - B| \geq \epsilon$,то $C1, C2 = C2, C2 - g_2 \frac{C2-C1}{g_2-g_1}$ и возвращаемся к пункту 2

2 Тестовый пример с детальными расчетами для задачи малой размерности

Дано: $y'' + xy' - \frac{2}{\cos^2 x} y = x \cdot \sec^2 x,\ x \in [0, 1]$

Точное решение $y = tg(x)$; $n = 2$, $h = \frac{b-a}{2} = 0.5$

Условие граничные: $\begin{cases} y(0) = 0 = A \\ y(1) = tg(1) \approx 1,557 = B \end{cases}$

$$\begin{cases} y' = z = f_1(x, y, z) \\ z' = x \cdot \sec^2(x) + \frac{2}{\cos^2 x} y - xz = f_2(x, y, z) \end{cases}$$

+) Выбрат $z(a) = C_1 = -1.0 = z(0)$

По метод Кутты - Мерсон:

- $y(0.5) = y(0) + (y_{K1} + 4y_{K4} + y_{K5}) \cdot \frac{h}{6} \approx -0,501$

  $z(0.5) = z(0) + (z_{K1} + 4z_{K4} + z_{K5}) \cdot \frac{h}{6} \approx -1,017$

- $y(1) = y(0.5) + (y_{K1} + 4y_{K4} + y_{K5}) \cdot \frac{h}{6} \approx -1.068$

  $z(1) = z(0.5) + (z_{K1} + 4z_{K4} + z_{K5}) \cdot \frac{h}{6} \approx -1,44$

$\Rightarrow g_1 = B - y(1) \approx 2,625$

+) Выбрат $z(a) = C_2 = 0.0$

- $y(0.5) = 0,022$, $z(0.5) = 0,139$
- $y(1) = 0,234$, $z(1) = 0.998$

$g_2 = B - y(1) = 1.323$

+) Выбрат $z(a) = C_3 = C_2 - g_2 \cdot \frac{(C_2 - C_1)}{g_2 - g_1} = 1.016$

- $y(0.5) = 0.553$, $z(0.5) = 1.315$
- $y(1.0) = 1.557$, $z(1.0) = 3.474$

$g_3 = B - y(1) \approx 0$

3 Подготовка контрольных тестов

Для исследования работы метода, выбрать n = 4, n = 8 , чтобы построить графики точного и численных решений для двух фиксированных значений шага на отрезке и график ошибки на отрезке для этих решений.

Для исследования зависимости фактической ошибки от заданной точности и фактической ошибки от фиксированного шага интегрирования по методу пристрелки дпя краевая задачи Коши: $y" + xy' - \frac{2}{cos^2(x)}y = x.sec^2(x)$ на отрезке [0, 1] , мы выбрали $\epsilon = [10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}, 10^{-9}]$

Вычислите 20-кратную ошибку с возмущения $1\%, 2\%, 3\%, 4\%, 5\%$, а затем постройте график boxplot зависимости относительной ошибки от возмущения.

4 Модульная структура программы

- void Func(double x, double y[2], double z, double perturbation, double ytemp[2]): Возвращает значение функции $f(x, y, z) = pertubation\frac{x+2y}{cos^2(x)}y - xz$ в точке (x,y,z) с возмущение perturbation
- double Exact(double x): Возвращает точное решение $y = tan(x)$ в точке x
- int ShootingMethod(double a, double b, double ya, double yb, double epsilon, double *k, double per, double yk[1000], double xk[1000]): Возвращает фактическая ошибка для достижения заданной точности по методу пристрелки на [a,b]

5 Численный анализ решения задачи

Краевая задача: $y" + xy' - \frac{2}{cos^2(x)}y = x.sec^2(x)$, y(0) = 0, y(1) = 1.557 на [0, 1]

- Построить графики точного и численных решений для двух фиксированных значений шага n = 4 (h = 0.25), n = 8 (h = 0.125) на отрезке[0, 1.5]

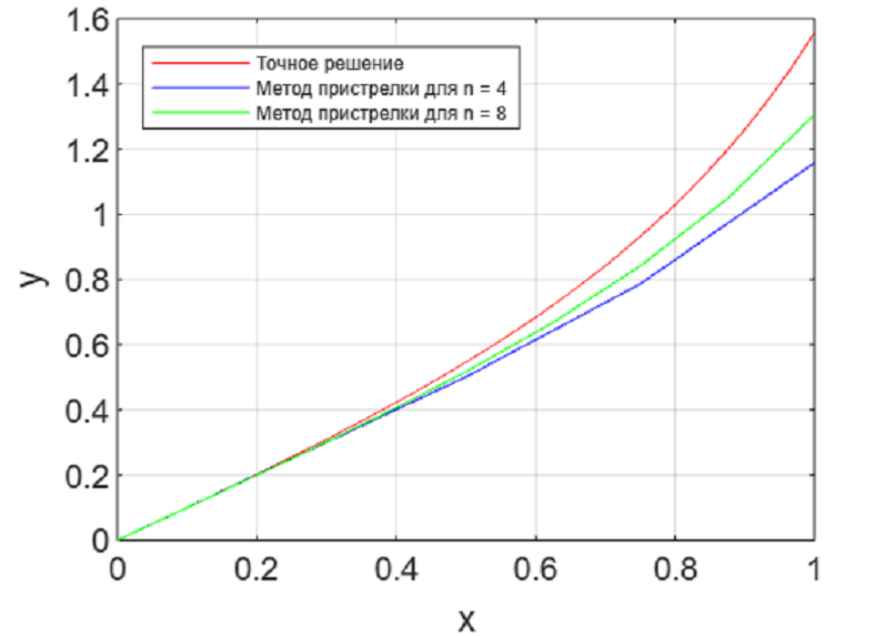

Рис. 1: графики точного и численных решений для двух фиксированных значений шага n = 4, n =8

- Построить график ошибки на отрезке для этих решени n =4, n=8.

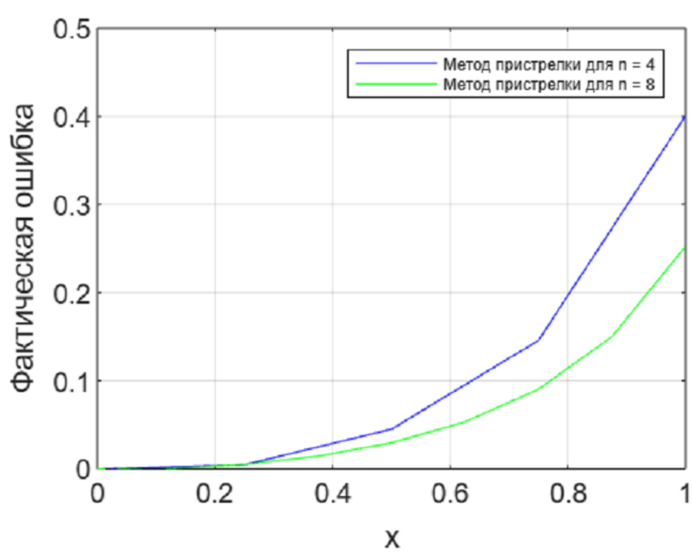

Рис. 2: График ошибки на отрезке для этих решений.

- Построить график изменения шага от заданной точности

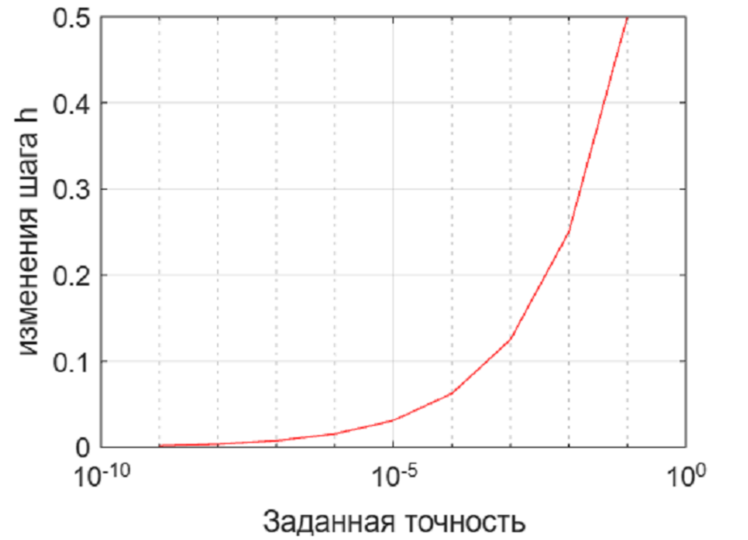

Рис. 3: График изменения шага от заданной точности

- Построить график зависимости фактической погрешности от заданной точности

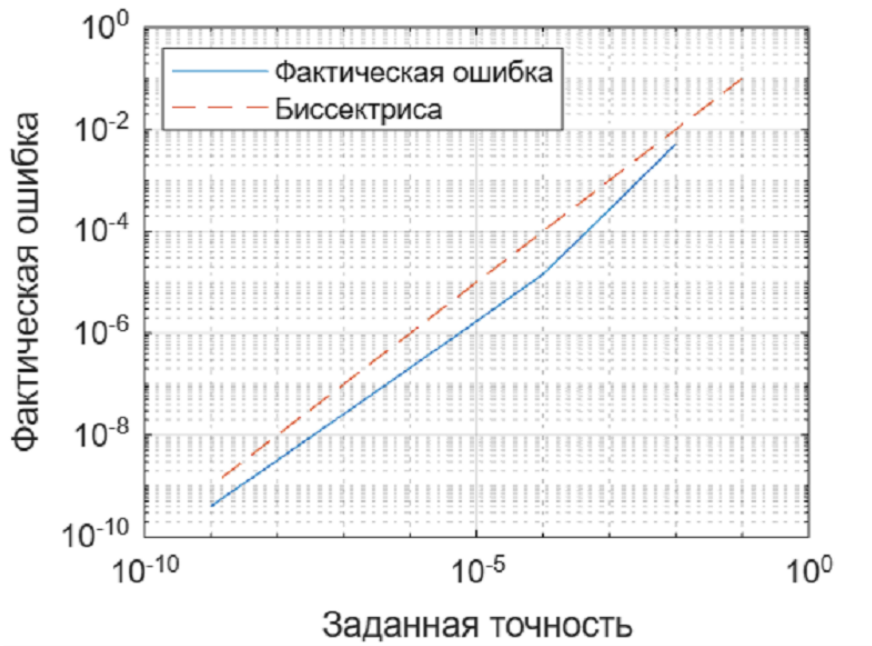

Рис. 4: График зависимости фактической погрешности от заданной точности

- Построить график зависимости фактической погрешности от заданной точности по основанию 2.

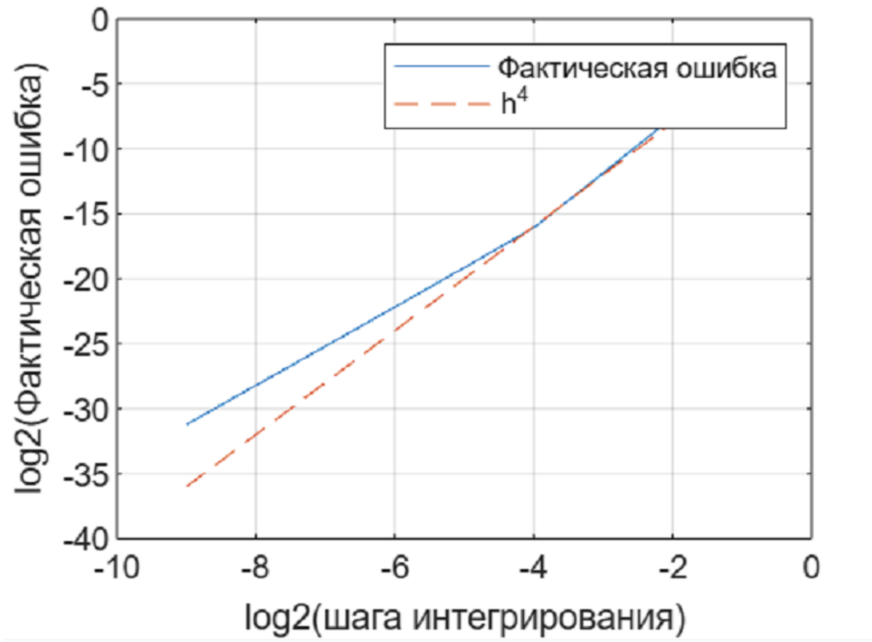

Рис. 5: График зависимости фактической погрешности от заданной точности по основанию 2

По графику определить порядок точности применяемой формулы k = 3.98 мало чем отличающуюся от теоретического порядок точности k = 4

- Построить графики зависимости относительной ошибки от возмущения в коэффициент уравнения

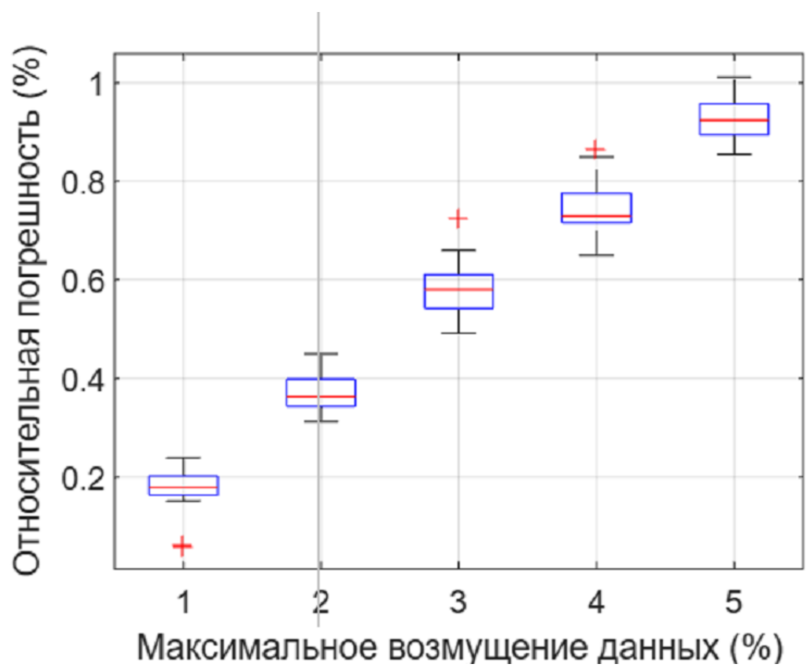

Рис. 6: График зависимости относительной ошибки от возмущения

6 Краткие выводы

1.Метод пристрелки показал свою эффективность в нахождении численного решения краевой задачи.
2. При увеличении заданной точности, фактической погрешности и шага интегрирования будут также увеличиваться.
3.Использование логарифмического масштаба по основанию 2 позволяет четко увидеть зависимость фактической ошибки от длины отрезка разбиения. Анализ наклона линии на графике позволяет определить порядок точности применяемой формулы $k = 4$
4.Небольшие возмущение в коэффициент уравнения влияют на конечный результат, что говорит об устойчивости метода пристрелки.