Санкт-Петербургский
Политехнический университет Петра Великого

Отчет по лабораторной работе №11

Решение интегралов с помощью квадратурных формул типа Гаусса

Метод Радо (с одним фиксированным узлом на правом конце)
для 2, 3 слагаемых

Студент: Чинь Тхи Тху Хоай
Преподаватель: Козлов Константин Николаувич

Группа: 5030102/20001

Санкт-Петербург
2024

Содержание

1 Формулировка задания и её формализации

Квадратурные формулы типа Гаусса используются для приближенного вычисления интегралов. Они позволяют оценить интеграл функции, выбрав оптимальные точки (узлы) и веса для суммирования значений функции в этих точках. Формулы Гаусса считаются одними из наиболее эффективных для вычисления интегралов, так как они обеспечивают высокую степень точности при минимальном количестве узлов.
Методы Радо - это специальный класс квадратурных формул, где один из узлов фиксирован на одном из концов интервала интегрирования. Этот лаб использовать методы Радо (с одним фиксированным узлом на правом конце) для вычисления интегралов с 2 и 3 слагаемыми. И исследовать зависимость фактической ошибки и числа итераций от заданной точности, заивисмость фактической ошибки от длины отрезка разбиения.

2 Алгоритм методов и условия их применимости

2.1 Метод Радо (с одним фиксированным узлом на правом конце)

Представим определлнный интеграл функции f(x) на промежутке [a; b] в виде суммы интегралов вида $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$

Т.е. в итоге получаем, что $p(x) = b - x$
$=> \omega(x) = \alpha I_{n-1}^{(0,1)}(x)$

1. Вычислить для 2 слагаемых : $n=2$

$x_2 = b$

$\tilde{p}(x) = p(x).q(x) = b-x$

$\tilde{\omega}(x) = \alpha\, J_{n-1}^{(0,1)}(x) = \frac{c_1}{(b-x)} \frac{d}{dx}\left[(x-a)^1.(b-x)^2\right]$

$= \frac{c_1}{b-x}\left[(b-x)^2 - 2(x-a)(b-x)\right] = c_1(b+2a-3x) = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = \frac{2a+b}{3}$

Системы:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = b-a = \int_a^b dx \\ x_1.A_1 + x_2 A_2 = \int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{3(b-a)}{4} \\ A_2 = \frac{b-a}{4} \end{cases}$$

$\int_a^b f(x)dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) = \frac{3(b-a)}{4} f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + \frac{b-a}{4} . f(b)$

2. Вычислить для 3 слагаемых : $n=3$

$x_3 = b$

$\tilde{p}(x) = b-x$

$\tilde{\omega}(x) = \frac{c_1}{b-x} \frac{d^2}{dx^2}\left[(x-a)^2.(b-x)^3\right]$

$= \frac{c_1}{b-x}\left[2(b-x)^3 - 12(x-a)(b-x)^2 + 3(x-a)^2(b-x)\right]$

$= 2c_1(10x^2 - (8b+12a)x + b^2+3a^2+6ab) = 0$

$x_{1,2} = \frac{6a+4b \pm \sqrt{6}(b-a)}{10}$

Системы:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = b-a \\ A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = \frac{b^2-a^2}{2} \\ A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + A_3x_3^2 = \frac{b^3-a^3}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{(b-a)(\sqrt{6}+16)}{36} \\ A_2 = \frac{(b-a)(16-\sqrt{6})}{36} \\ A_3 = \frac{b-a}{9} \end{cases}$$

2.2 Алгоритм метода Радо

1. Количество разбиение отрезка n = 1
2. Вычисляем отрезки $x_i = x_0 + i \cdot h$, где $x_0 = a$, $h = \frac{b-a}{n}$.
3. Для отрезки вычислить интеграл по формулу и $I = \sum_{i=1}^{k} I_i$
4. Обновляем $n := n * 2$.
5. Вычисляем R_2 и R_3 по формуле из пункта 2,3 для 2, 3 слагаемых
6. Если $|R_2 - R_3| \geq \epsilon$, то возвращаемся к пункту 4, иначе возвращаем R_3

2.3 Условие применимости

Функция f(x) должна быть дважды дифференцируемой на отрезке [a; b]

3 Тестовый пример с детальными расчетами для задачи малой размерности

Дано: $f(x) = (x^5 - 5{,}2x^3 + 5{,}5x^2 - 7x)\cos 2x$, $x \in [-3,3]$, $I = 2{,}6$

а) Для 2 разбиений отрезка: $[-3,0]$, $[0,3]$

+) 2 слагаемы

$$I_1 = \int_{-3}^{0} f(x)\,dx = \frac{3}{4}(0+3)\,f(-2) + \frac{0+3}{4}\,f(0) = -67{,}064$$

$$I_2 = \int_{0}^{3} f(x)\,dx = \frac{3}{4}(3+0)\,f(1) + \frac{3-0}{4}\,f(3) = 99{,}746$$

$$\Rightarrow I'' = 32{,}681$$

+) 3 слагаемы

$$I_1 = \frac{\sqrt{6}+16}{36}\cdot 3\cdot f\left(\frac{-18+3\sqrt{6}}{10}\right) + \frac{16-\sqrt{6}}{36}\cdot 3\cdot f\left(-\frac{18-3\sqrt{6}}{10}\right) + \frac{3}{9}\cdot f(0) = -2{,}104$$

$$I_2 = \frac{\sqrt{6}+16}{36}\cdot 3\cdot f\left(\frac{12+3\sqrt{6}}{10}\right) + \frac{16-\sqrt{6}}{36}\cdot 3\cdot f\left(\frac{12-3\sqrt{6}}{10}\right) + \frac{3}{9}\,f(3) = 44{,}247$$

$$\Rightarrow I''' = 42{,}143, \quad |I'' - I'''| = 9{,}462$$

b) Для 4 разбиений отрезка: $[-3,-1.5]$, $[-1{,}5;0]$, $[0,1.5]$, $[1.5,3]$

+) Для 2 слагаемы

$$I_1 = \frac{3}{4}\cdot 1{,}5\cdot f(-2{,}5) + \frac{1{,}5}{4}\cdot f(-1{,}5) = -0{,}87$$

$$I_2 = \frac{3}{4}\cdot 1{,}5\cdot f(-1) + \frac{1{,}5}{4}\,f(0) = -7{,}818$$

$$I_3 = \frac{3}{4}\cdot 1{,}5\cdot f(0{,}5) + \frac{1{,}5}{4}\cdot f(1{,}5) = 1{,}332$$

$$I_4 = \frac{3}{4}\cdot 1{,}5\cdot f(2) + \frac{1{,}5}{4}\,f(3) = 48{,}38$$

$$\Rightarrow I'' = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 41{,}024$$

+) 3 слагаемы

$$I_1 = \frac{\sqrt{6}+16}{36}\cdot 1{,}5\cdot f\left(-\frac{48+3\sqrt{6}}{20}\right) + \frac{16-\sqrt{6}}{36}\cdot 1{,}5\cdot f\left(-\frac{48-3\sqrt{6}}{20}\right) + \frac{1{,}5}{9}\cdot f(-1{,}5) = -22{,}82$$

$$I_2 = \frac{\sqrt{6}+16}{36}\cdot 1{,}5\cdot f\left(-\frac{18+3\sqrt{6}}{20}\right) + \frac{16-\sqrt{6}}{36}\cdot 1{,}5\cdot f\left(-\frac{18-3\sqrt{6}}{20}\right) + \frac{1.5}{9}\cdot f(0) = -9{,}36$$

$$I_3 = \frac{\sqrt{6}+16}{36}\cdot 1{,}5\cdot f\left(\frac{12+3\sqrt{6}}{20}\right) + \frac{16-\sqrt{6}}{36}\cdot 1{,}5\cdot f\left(\frac{12-3\sqrt{6}}{20}\right) + \frac{1{,}5}{9}\cdot f(1{,}5) = 2{,}1307$$

$$I_4 = \frac{\sqrt{6}+16}{36}\cdot 1{,}5\cdot f\left(\frac{42+3\sqrt{6}}{20}\right) + \frac{16-\sqrt{6}}{36}\cdot 1{,}5\cdot f\left(\frac{42-3\sqrt{6}}{20}\right) + \frac{1{,}5}{9}\cdot f(3) = \cancel{26}\ 29{,}76$$

$$\Rightarrow I''' = -0{,}29, \quad |I'' - I'''| = 41{,}314$$

4 Подготовка контрольных тестов

Для исследования зависимости фактической ошибки, числа итераций от заданной точности по методу Радо (с одним фиксированным узлом на правом конце) для 2, 3 слагаемых дпя функции: $y = (x^5 - 5.2x^3 + 5.5x^2 - 7x)cos(2x)$ на отрезке [-3, 3] , мы выбрали $\epsilon = [10^{-6}, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}, 10^{-9}]$
Уточнить значение интеграла с помощью поправки Ричардсона $I_{h/2} = I_{h/2} + \frac{I_h - I_{h/2}}{2^p - 1}$

После «наглядных» результатов, построим график ошибок, то есть график модуля разности между значением интеграла по методу трапеций в точке и значением точно интеграла в этой же точке, и построим график числа итераций от заданной точности.
Для исследования функция модификации, выбрали функцию: $y = (x^5 - 5.2|x^3| + 5.5x^2 - 7x)cos(2x)$.

5 Модульная структура программы

- double Func(double x): Возвращает значение функции $y = (x^5 - 5.2x^3 + 5.5x^2 - 7x)cos(2x)$ в точке x

- double ModifiedFunc(double x): Возвращает значение функции $y = (x^5 - 5.2|x^3| + 5.5x^2 - 7x)cos(2x)$ в точке x

- double rado_2(double a, double b, double (*func)(double x), double fb): Возвращает значение интеграл функций по методу Радо с 2 слагаемы на отрезке [a,b]

- double rado_3(double a, double b, double (*func)(double x), double fb): Возвращает значение интеграл функций по методу Радо с 3 слагаемы на отрезке [a,b]

- double Integral(double eps, double a, double b, int *k, int *n, double (*func)(double x)): Возвращает значение интеграл функций для достижения заданной точности по методу Радо, k - число итераций, n - разбиений отрезка

6 Численный анализ решения задачи

6.1 функции $y = (x^5 - 5.2x^3 + 5.5x^2 - 7x)cos(2x)$, [a,b] = [-3,3]

- Построить график зависимости фактической ошибки от заданной точности, отметить линию биссектрисы

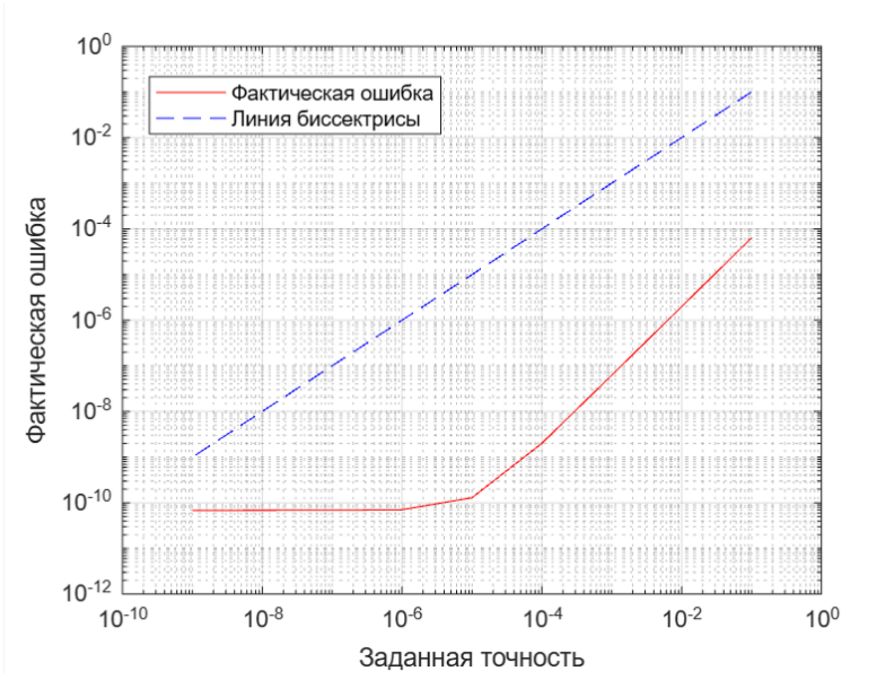

Рис. 1: График зависимости фактической ошибки от заданной точности

- Построить линию фактической ошибки для уточненного значения интеграла от заданной точности с помощью поправки Ричардсона

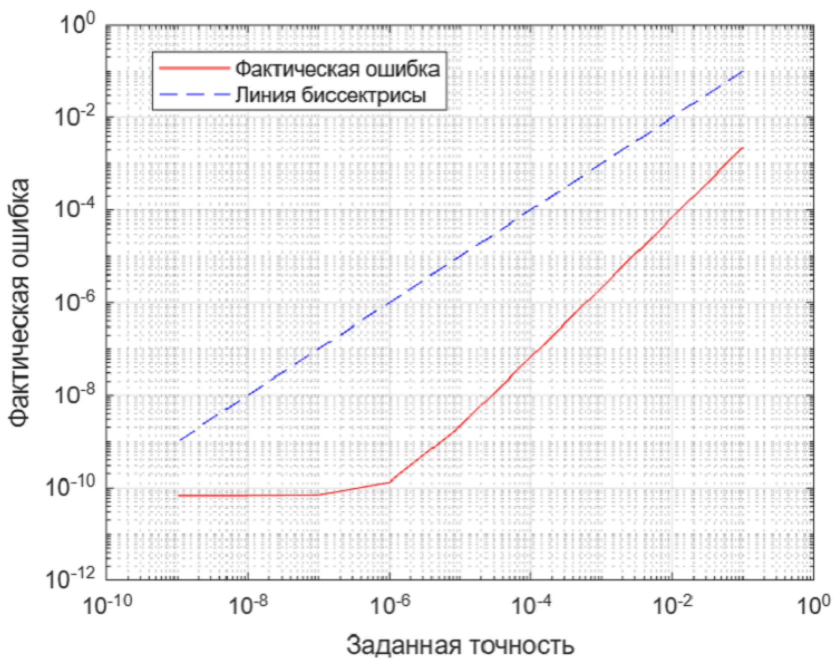

Рис. 2: График зависимости фактической ошибки от заданной точности

- Построить график зависимости числа итераций от заданной точности

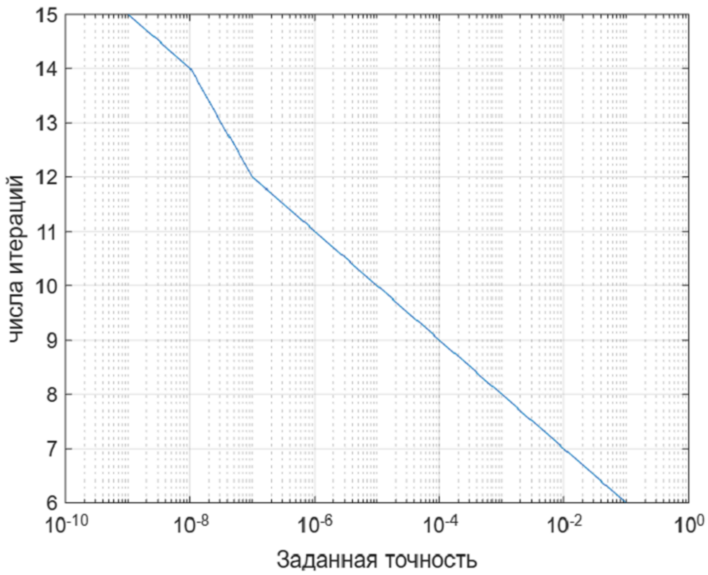

Рис. 3: График зависимости числа итераций от заданной точности

- Построить график фактической ошибки от длины отрезка разбиения, использовать логарифмический масштаб по основанию 2.

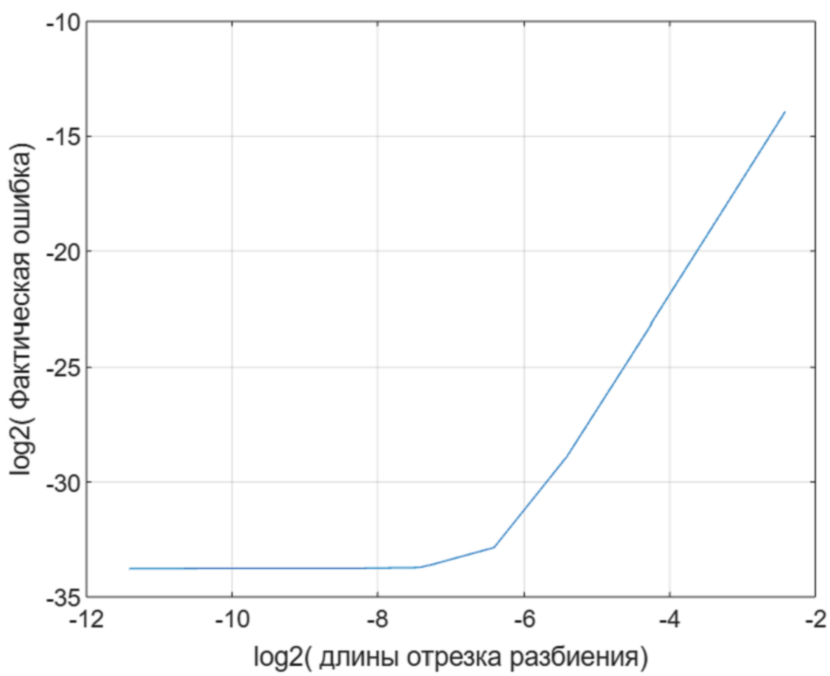

Рис. 4: фактической ошибки от длины отрезка разбиения

По графику определить порядок точности применяемой формулы k = 2.1101

6.2 функции $y = (x^5 - 5.2|x^3| + 5.5x^2 - 7x)cos(2x)$, [a,b] = [-3,3]

- Построить график зависимости фактической ошибки от заданной точности, отметить линию биссектрисы

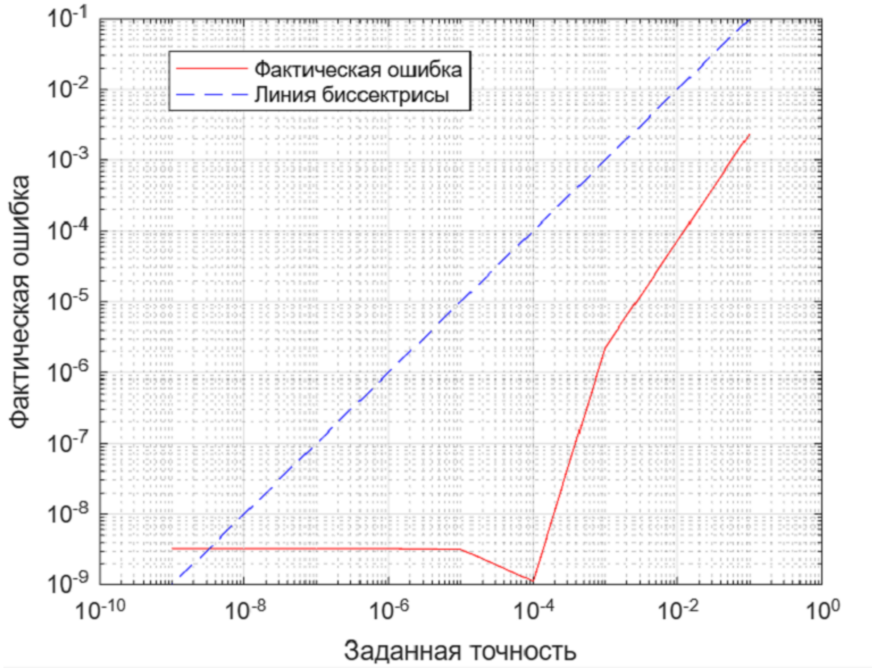

Рис. 5: График зависимости фактической ошибки от заданной точности

- Построить график зависимости числа итераций от заданной точности

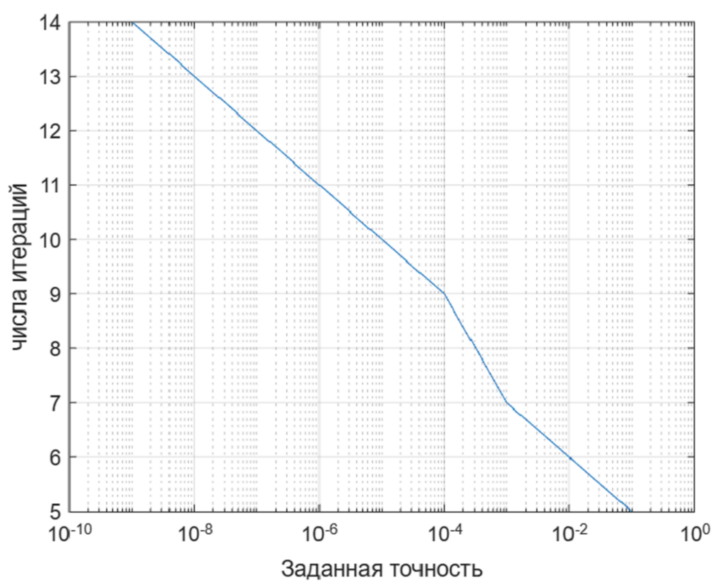

Рис. 6: График зависимости числа итераций от заданной точности

6.3 Сравнение решения интегралов методами трапеции и Радо

- Построить график зависимости фактической погрешности от количества вызовов подынтегральной функции

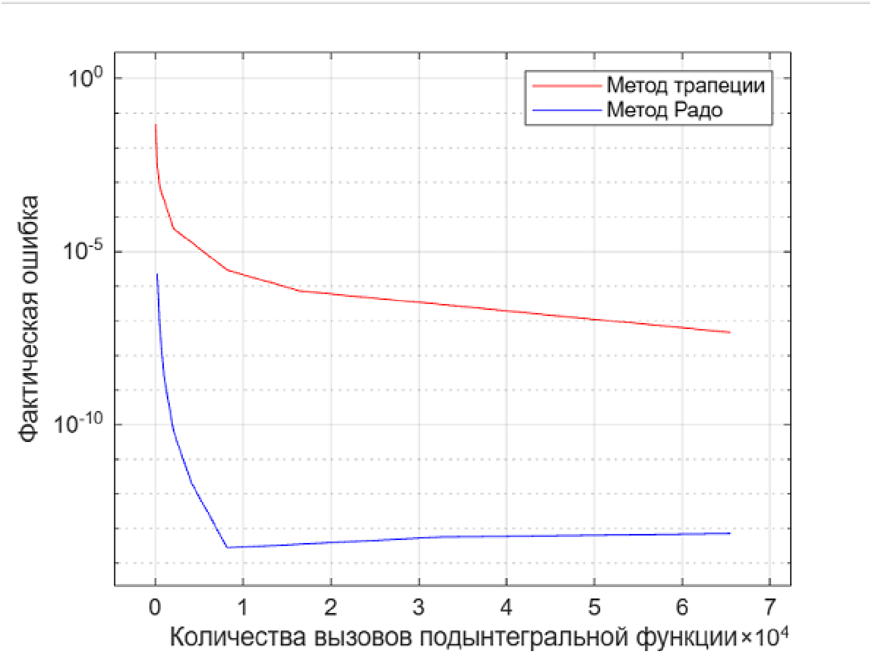

Рис. 7: График зависимости фактической ошибки от количества вызовов подынтегральной функции

Из графика мы видим, что метод Радо имеет меньшую фактическую погрешность, чем метод трапеции при одинаковом количестве вызовов функции, благодаря более точному подходу к вычислениям на каждом шаге.

7 Краткие выводы

1. С уменьшением заданной точности , фактическая ошибка уменьшается, приближаясь к идеальной линии ошибки, которая соответствует заданной точности. Это демонстрирует эффективность численного метода и его способность достигать более высокой точности с увеличением числа разбиений.
2.С уменьшением заданной точности , число итераций увеличивается.
3.Использование логарифмического масштаба по основанию 2 позволяет четко увидеть зависимость фактической ошибки от длины отрезка разбиения. Анализ наклона линии на графике позволяет определить порядок точности применяемой формулы k = 2
4. Модификация функции с добавлением модуля или функции знака создает разрывы первой производной, что может существенно повлиять на поведение численного метода, особенно в окрестности точек разрыва.