Санкт-Петербургский
Политехнический университет Петра Великого

Отчет по лабораторной работе №10

Решение интегралов с помощью квадратурных формул Ньютона-Котеса

Метод трапеций

Студент:	Чинь Тхи Тху Хоай
Преподаватель:	Козлов Константин Николаувич
Группа:	5030102/20001

Санкт-Петербург
2024

Содержание

1 Формулировка задания и её формализации **2**

2 Алгоритм методов и условия их применимости **2**

2.1 Метод трапеций 2

2.2 Алгоритм метода трапеций 2

2.3 Условие применимости 2

3 Тестовый пример с детальными расчетами для задачи малой размерности **3**

4 Подготовка контрольных тестов **4**

5 Модульная структура программы **4**

6 Численный анализ решения задачи **5**

6.1 функции $y = x^5 - 5.2x^3 + 5.5x^2 - 7x$, [a,b] = [-3,3] 5

6.2 функции $y = x^5 - 5.2|x^3| + 5.5x^2 - 7x$, [a,b] = [-3,3] 6

7 Краткие выводы **8**

1 Формулировка задания и её формализации

Метод трапеций — это численный метод для приближенного вычисления определенных интегралов. Он относится к квадратурным формулам Ньютона-Котеса, которые используются для аппроксимации интегралов с помощью сумм значений подынтегральной функции, взвешенных определенным образом. Этот лаб требуется найти приближенное значение интеграла с заданной точностью с помощью обобщенной формулы трапеций. Заданная точность достигается по правилу Рунге. И исследовать зависимость фактической ошибки и числа итераций (число разбиений отрезка) от заданной точности, заивисмость фактической ошибки от длины отрезка разбиения.

2 Алгоритм методов и условия их применимости

2.1 Метод трапеций

Представим определнный интеграл функции f(x) на промежутке [a; b] в виде суммы интегралов вида $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}.h$, где $h = \frac{b-a}{n}$

Т.е. в итоге получаем, что $\int_a^b f(x)\,dx = h(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\ )$

Преобразуем немного формулу и получим $\int_a^b f(x)\ = h(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i))$

2.2 Алгоритм метода трапеций

1. Вычисляем шаг h по формуле: $h = \frac{b-a}{n}$.

2. Определяем узлы $x_i = x_0 + i \cdot h$, где $x_0 = a$ и значение функции в них $f(x_i)$, где $i = 0, 1, \ldots, n$.

3. Цикл: вычисляем $I = \int_a^b f(x) = h\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$.

4. Обновляем $n := 2n$.

5. Вычисляем I_{2n} по формуле из пункта 3.

6. Если $\frac{|I_{2n}-I|}{2^k-1} \geq \epsilon$, то возвращаемся к пункту 4, иначе возвращаем I_{2n}, где $k = 2$ для метода трапеций.

2.3 Условие применимости

Функция f(x) должна быть дважды дифференцируемой на отрезке [a; b]

3 Тестовый пример с детальными расчетами для задачи малой размерности

Дано функция: $f(x) = x^3 + x + 1$ на отрезке $[0,4]$

+) $n = 1$, тогда $h = \frac{4-0}{1} = 4$, $x_0 = 0$, $x_1 = 4$

$$I_1 = \int_0^4 (x^3 + x + 1)\,dx = h \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}\right) = 4 \cdot \frac{1+69}{2} = 140$$

+) $n = 2$, тогда $h = \frac{4-0}{2} = 2$

$x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$

$$I_2 = h \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_2)}{2} + f(x_1)\right) = 2 \cdot \left(\frac{1+69}{2} + 11\right) = 92$$

Условие Рунге: $\frac{|I_2 - I_1|}{2^2 - 1} = 16$

+) $n = 4$, тогда $h = \frac{4-0}{4} = 1$

$x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$

$$I_4 = h \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_4)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\right) = 1 \cdot \left(\frac{1+69}{2} + 3 + 11 + 31\right)$$

$$= 80$$

Условие Рунге: $\frac{|I_4 - I_2|}{2^2 - 1} = 4$

$$I = \int_0^4 (x^3 + x + 1)\,dx = 76$$

4 Подготовка контрольных тестов

Для исследования зависимости фактической ошибки, числа итераций от заданной точности по методу трапеций дпя функции: $y = x^5 - 5.2x^3 + 5.5x^2 - 7x$ на отрезке [-3, 3] , мы выбрали $\epsilon = [10^{-6}, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}, 10^{-9}]$
После «наглядных» результатов, построим график ошибок, то есть график модуля разности между значением интеграла по методу трапеций в точке и значением точно интеграла в этой же точке, и построим график числа итераций от заданной точности.
Для исследования функция модификации, выбрали функцию: $y = x^5 - 5.2|x^3| + 5.5x^2 - 7x$.

5 Модульная структура программы

- double Func(double x): Возвращает значение функции $y = x^5 - 5.2x^3 + 5.5x^2 - 7x$ в точке x

- double ModifiedFunc(double x): Возвращает значение функции $y = x^5 - 5.2|x^3| + 5.5x^2 - 7x$ в точке x

- double trapezoidalIntegral(int n): Возвращает значение интеграл функций с n разбиением отрезка по методу трапеций

- double Integral(double eps, int *k, int *n): Возвращает значение интеграл функций для достижения заданной точности использовать правило Рунге, k - число итераций, n - разбиений отрезка

6 Численный анализ решения задачи

6.1 функции $y = x^5 - 5.2x^3 + 5.5x^2 - 7x$, [a,b] = [-3,3]

- Построить график зависимости фактической ошибки от заданной точности, отметить линию биссектрисы

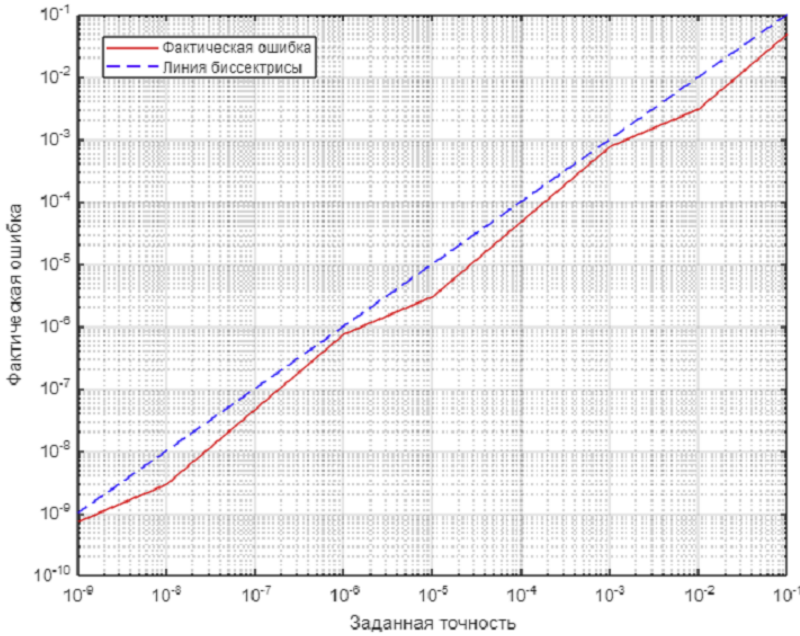

Рис. 1: График зависимости фактической ошибки от заданной точности

- Построить график зависимости числа итераций от заданной точности

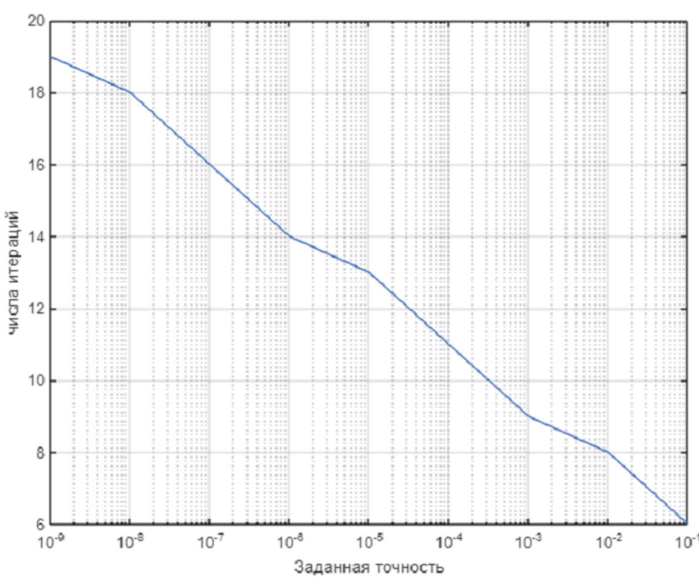

Рис. 2: График зависимости числа итераций от заданной точности

- Построить график фактической ошибки от длины отрезка разбиения, использовать логарифмический масштаб по основанию 2. По графику определить порядок

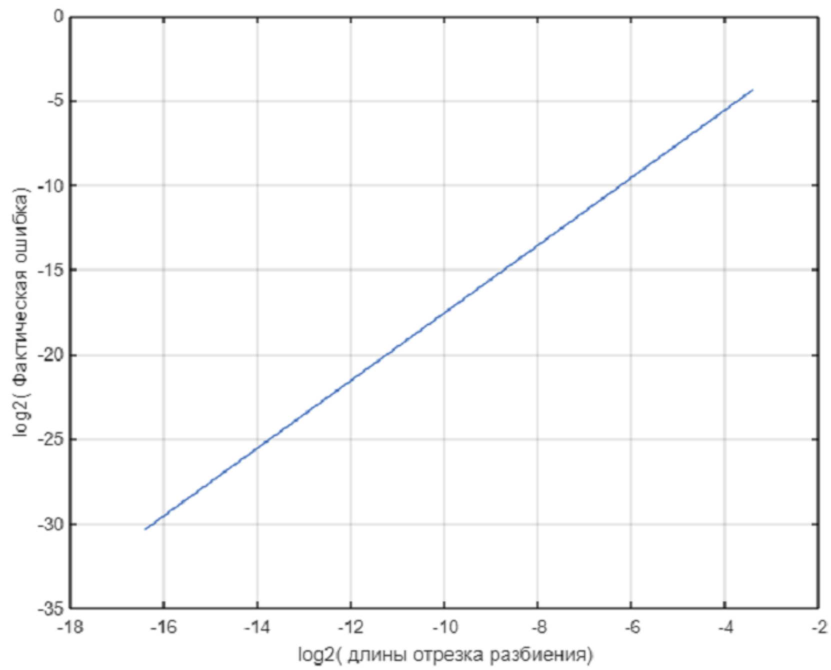

Рис. 3: фактической ошибки от длины отрезка разбиения

точности применяемой формулы k = 2.002, мало чем отличающийся от k = 2 в теории.

6.2 функции $y = x^5 - 5.2|x^3| + 5.5x^2 - 7x$, [a,b] = [-3,3]

- Построить график зависимости фактической ошибки от заданной точности, отметить линию биссектрисы

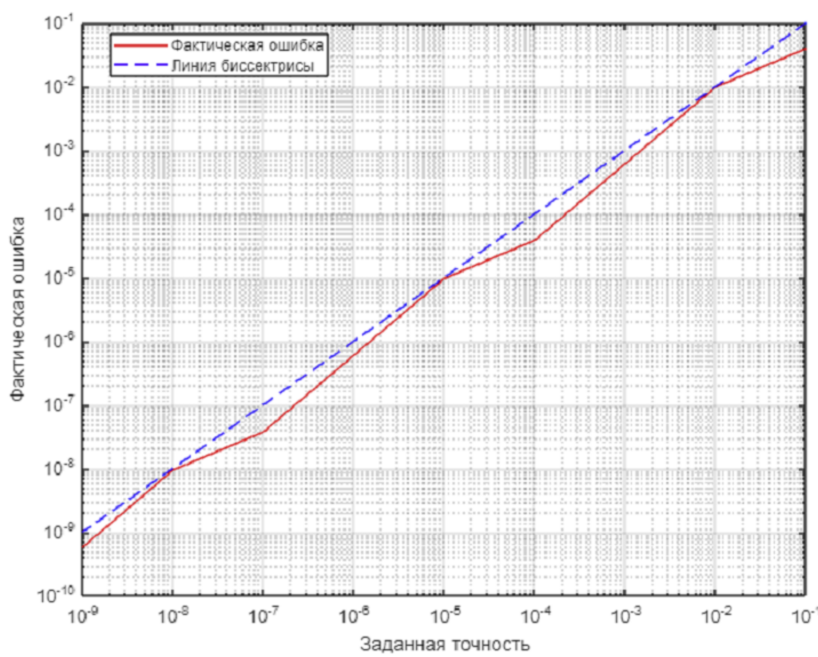

Рис. 4: График зависимости фактической ошибки от заданной точности

- Построить график зависимости числа итераций от заданной точности

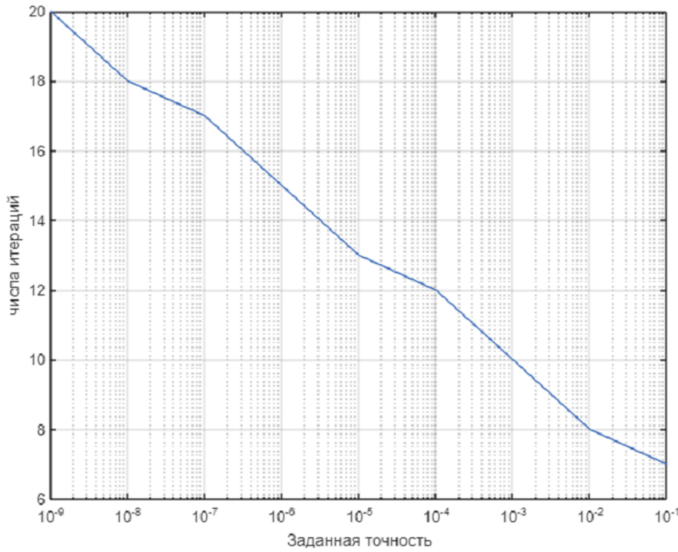

Рис. 5: График зависимости числа итераций от заданной точности

7 Краткие выводы

1. С уменьшением заданной точности , фактическая ошибка уменьшается, приближаясь к идеальной линии ошибки, которая соответствует заданной точности. Это демонстрирует эффективность численного метода и его способность достигать более высокой точности с увеличением числа разбиений.
2.С уменьшением заданной точности , число итераций увеличивается.
3.спользование логарифмического масштаба по основанию 2 позволяет четко увидеть зависимость фактической ошибки от длины отрезка разбиения. Анализ наклона линии на графике позволяет определить порядок точности применяемой формулы k = 2
4. Модификация функции с добавлением модуля или функции знака создает разрывы первой производной, что может существенно повлиять на поведение численного метода, особенно в окрестности точек разрыва.