Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет

Физико-Механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Лабораторная работа 1

по дисциплине **численные методы**

Решение алгебраических и трансцендентных уравнений

Вариант задания 3

Выполнил студент гр. 5030102/20002

Глаголев И. А.

Преподаватель

Козлов К. Н.

Санкт-Петербург

2024

Содержание

1 Формулировка задания и его формализация

Задача: решение алгебраических уравнений на заданных промежутках с определенной точностью. Поиск корней осуществляется при помощи "Метода половинного деления"и "Метода секущих".
Полином: $0.25x^3 - x + 1.2502$ на [0,2]
Алгебраическая функция: $x^4 + 3x^3 - 9x - 9$ на [1,2]
Алгебраическая функция с точкой разрыва: $\frac{x^4+3x^3-9x-9}{x-1.5}$ на [1,2]

2 Алгоритмы методов и условия их применимости

2.1 Метод половинного деления

Пусть $x = \frac{a+b}{2}$. Если $f(x) = 0$, то x - корень. Иначе, если $f(a)f(x) < 0$, то $b = x$, иначе $a = x$. Процесс продолжается пока $|b - a|$ не станет меньше 2ε.

1. $f(x)$ непрерывна на [a,b]
2. $f(a)f(b) < 0$

2.2 Метод Секущих

Пусть $x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)})\frac{x^{(k)}-x^{(k-1)}}{f(x^{(k)})-f(x^{(k-1)})}$.
Если $|x^{(k)} - x^{(k-1)}| < \varepsilon$, то $x^{(k+1)}$ - корень. Иначе $x^{(k)} = x^{(k-1)}$, то $x^{(k+1)} = x^{(k)}$. Процесс продолжается до тех пор, пока модуль разницы не станет меньше ε.

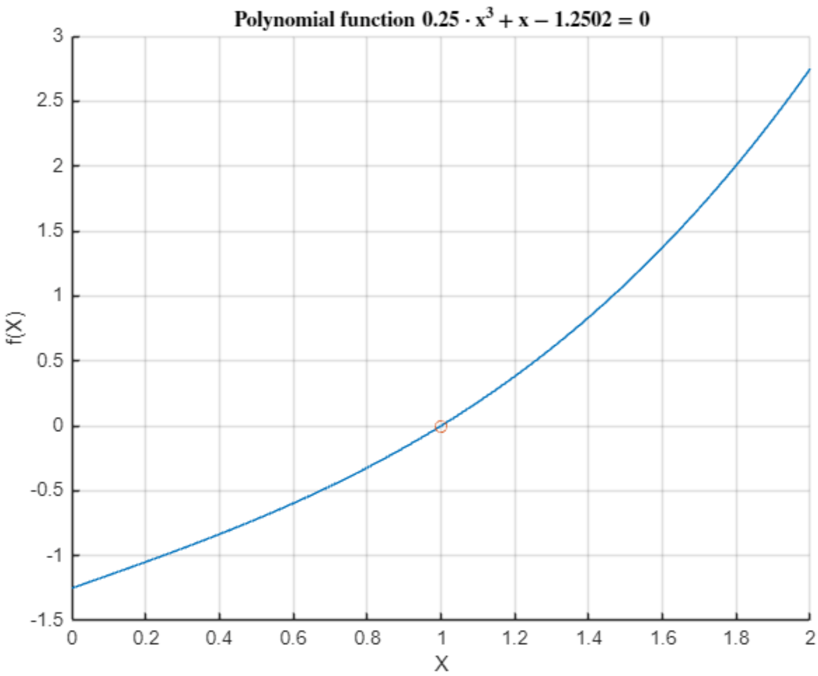
Условия применимости:

1. $f(x)$ непрерывна дважды на [a,b]
2. $f(a)f(b) < 0$
3. f', f'' знакопостоянны на $[a, b]$
4. Выполнено условие Фурье

3 Предварительный анализ задачи

3.1 Полином

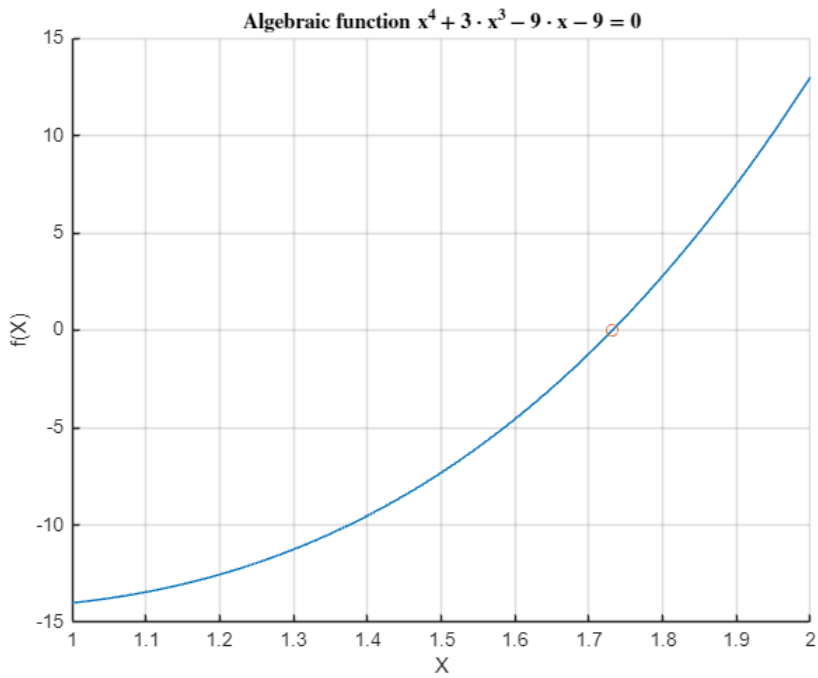
График функции:



1 График полинома

3.2 Алгебраическая функция

График функции:



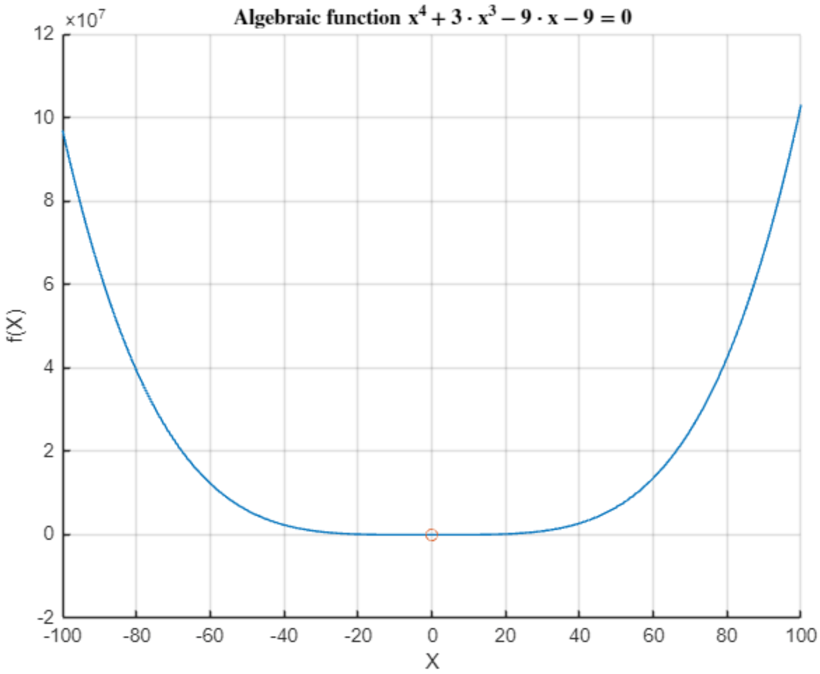
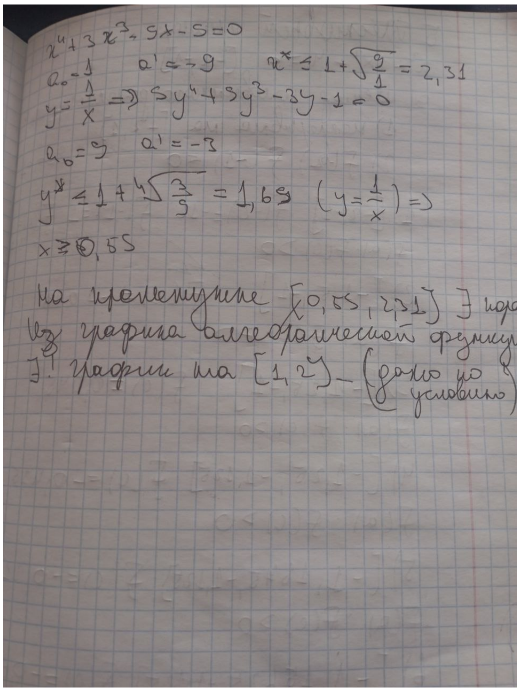


График алгебраической функции и график алгебраической функции с большим шагом



Поиск промежутков корней по теореме о верхней границе

3.3 Алгебраическая функция с разрывом

График функции:

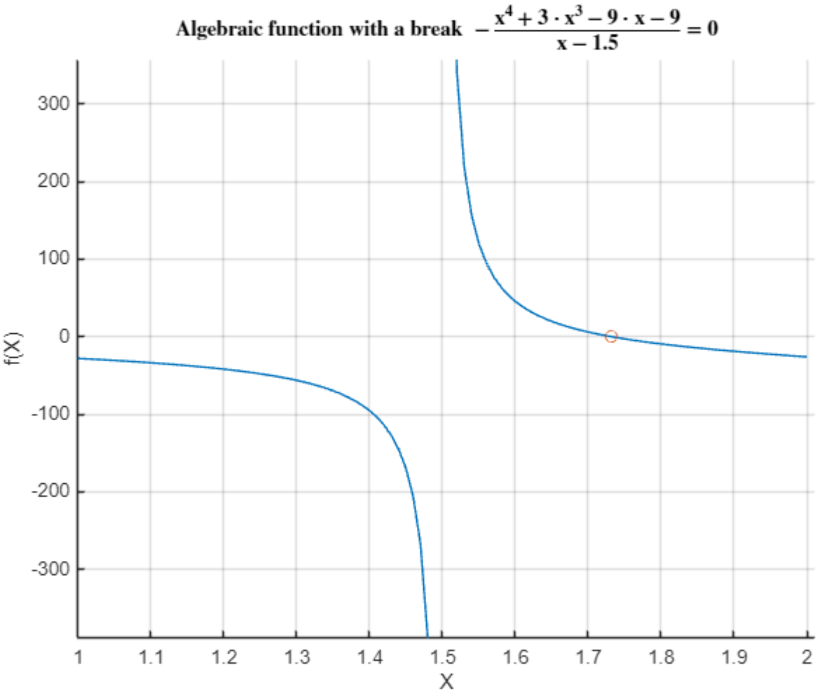
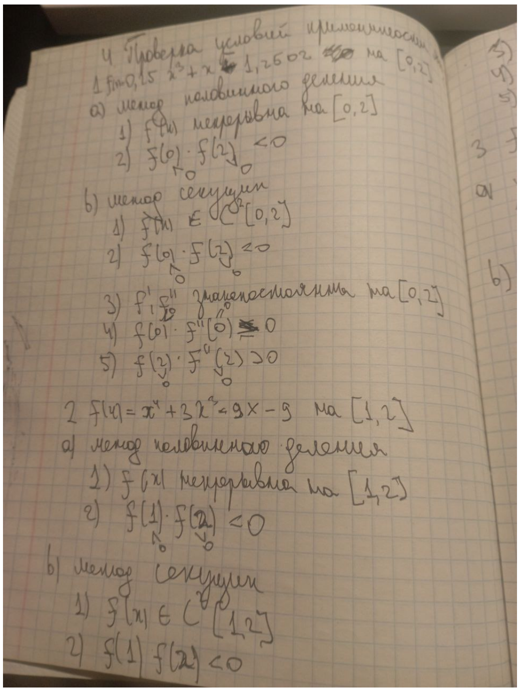


График алгебраической функции с точкой разрыва

4 Проверка условий применимости метода



4 Проверка условий применимости

1 $f(x) = 0,15x^3 + x - 1,2502$ на $[0,2]$

а) метод половинного деления

1) $f(x)$ непрерывна на $[0,2]$

2) $f(0) \cdot f(2) < 0$

б) метод секущих

1) $f(x) \in C^2[0,2]$

2) $f(0) \cdot f(2) < 0$

3) f', f'' знакопостоянны на $[0,2]$

4) $f(0) \cdot f''(0) = 0$

5) $f(2) \cdot f''(2) > 0$

2 $f(x) = x^4 + 3x^3 - 9x - 9$ на $[1,2]$

а) метод половинного деления

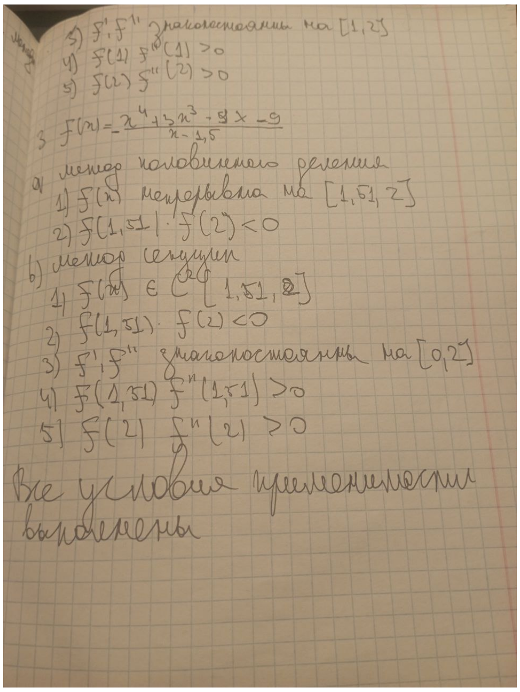
1) $f(x)$ непрерывна на $[1,2]$

2) $f(1) \cdot f(2) < 0$

б) метод секущих

1) $f(x) \in C^2[1,2]$

2) $f(1) f(2) < 0$



3) f', f'' знакопостоянны на $[1,2]$

4) $f(1) f''(1) > 0$

5) $f(2) f''(2) > 0$

3 $f(x) = -\frac{x^4 + 3x^3 - 9x - 9}{x - 1,5}$

а) метод половинного деления

1) $f(x)$ непрерывна на $[1,51, 2]$

2) $f(1,51) \cdot f(2) < 0$

б) метод секущих

1) $f(x) \in C^2[1,51, 2]$

2) $f(1,51) \cdot f(2) < 0$

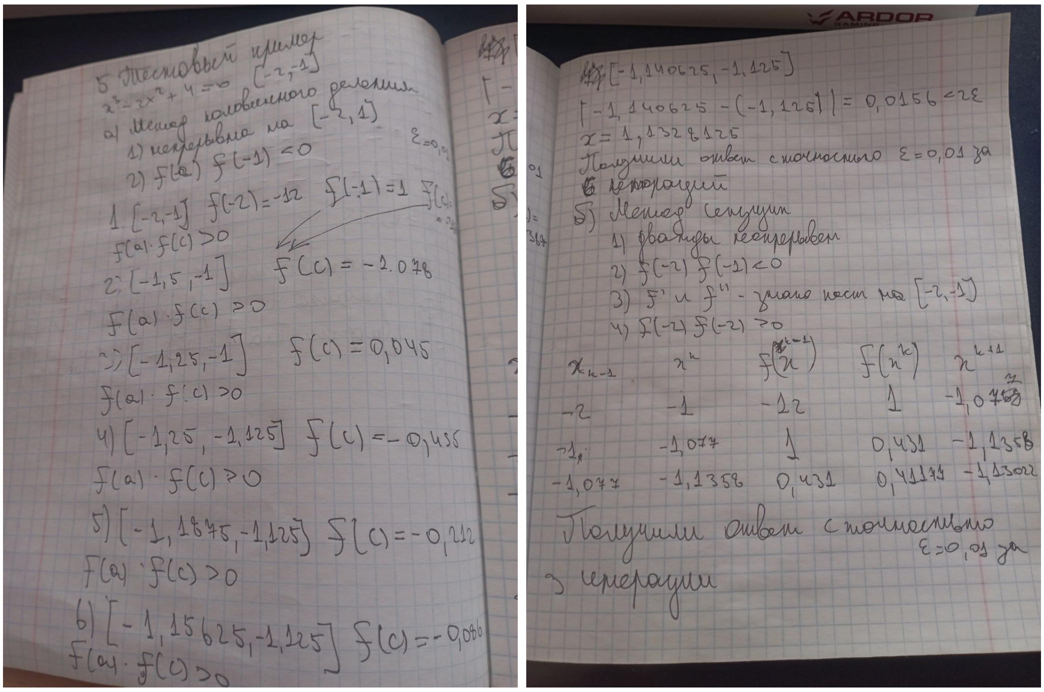
3) f', f'' знакопостоянны на $[0,2]$

4) $f(1,51) f''(1,51) > 0$

5) $f(2) f''(2) > 0$

Все условия применимости выполнены

5 Тестовый пример с детальными расчетами для задачи малой размерности



Ручной расчет для обоих методов

6 Структура программы

Введена структура *solution* для удобства при хранении результата работы методов:

```
typedef struct {
    double value, tolerance;
    int iteraction;
} solution;
```

Также ее видоизмененная форма для эпсилона:

```
typedef struct {
    double value, tolerance, epsilon;
} solution;
```

Функция, печатающая данные из типа *solution*:

```
void PrintResultSolution(solution result)
```

Функция, реализующая метод половинного деления:

```
solution bisection_solution(double(*f)(double), double a, double b, double eps, int N)
```

Функция, реализующая метод секущих:

```
solution secant_solution(double(*f)(double), double xk, double xk1, double eps, int N)
```

Функция, записывающая итоги метода половинного деления:

```
void SolutionBisectionComparison(double(*f)(double), double a, double b, double eps, int N
```

Функция, записывающая итоги метода секущих:

```
void SolutionSecantComparison(double(*f)(double), double a, double b, double eps, int N, c
```

Красивая печать итогов всех функций по заданной точности:

```
void PrintResult (double eps)
```

Полином:

```
double poly(double x)
```

Алгебраическая функция:

```
double alg(double x)
```

Алгебраическая функция с точкой разрыва:

```
double algbrake(double x)
```

7 Зависимость погрешности от итерации

7.1 Полином

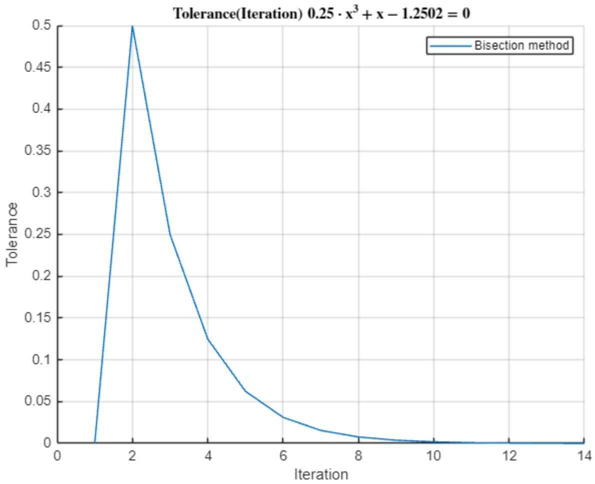


График зависимости погрешности от итерации для метода половинного деления для полинома, его приближение.

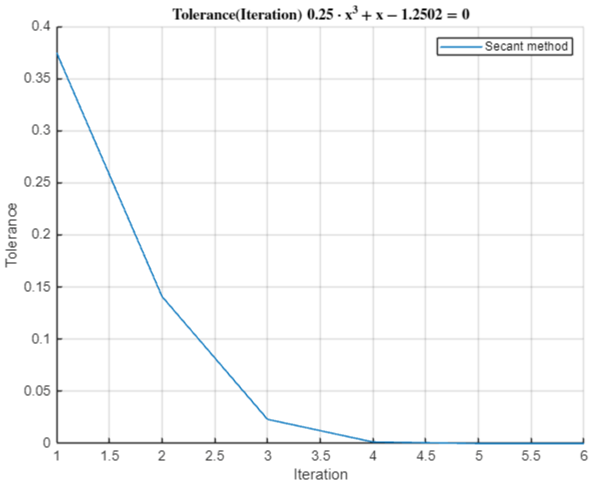


График зависимости погрешности от итерации для метода секукщих для полинома, его приближение.

7.2 Алгебраическая функция

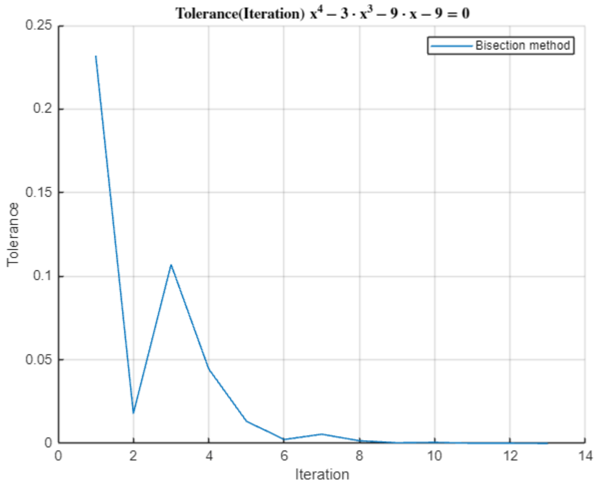


График зависимости погрешности от итерации для метода половинного деления для алгебраической функции, его приближение.

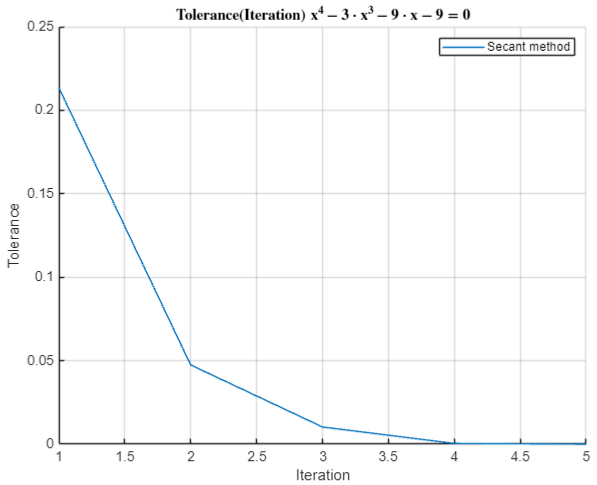


График зависимости погрешности от итерации для метода секукщих для алгебраичской функции, его приближение.

7.3 Алгебраическая функция с точкой разрыва

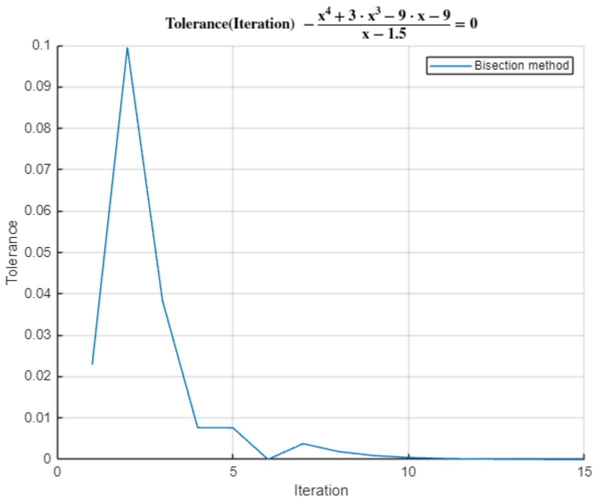


График зависимости погрешности от итерации для метода половинного деления для алгебраической функции с разрывом, его приближение.

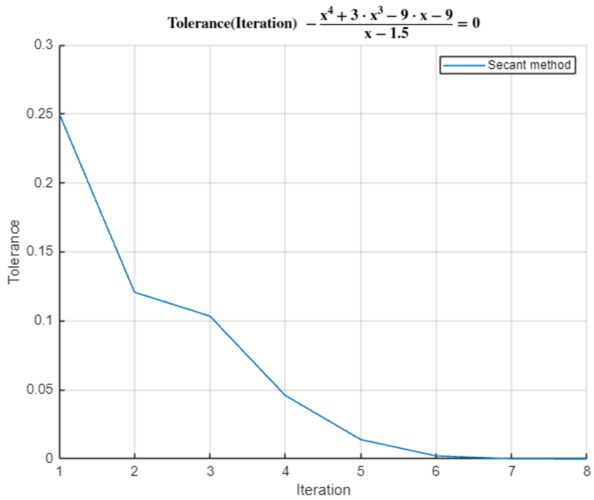


График зависимости погрешности от итерации для метода секукщих для алгебраической функции с разрывом, его приближение.

8 Зависимость погрешности от заданной точности

8.1 Полином

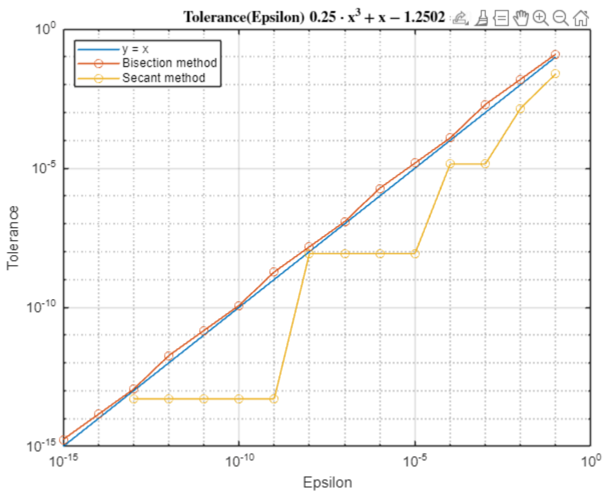


График зависимости погрешности от заданной точности для полинома

По графику мы видим, что метод половинного придерживается биссектрисы, но иногда от нее отклоняется в большую сторону.

8.2 Алгебраическая функция

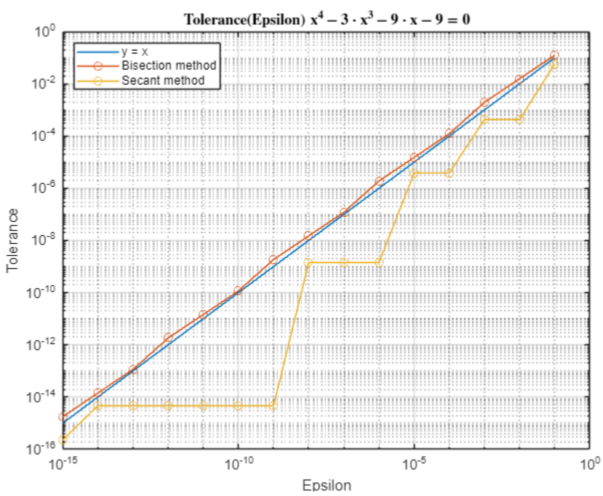


График зависимости погрешности от заданной точности для алгебраической функции

8.3 Алгебраическая функция с точкой разрыва

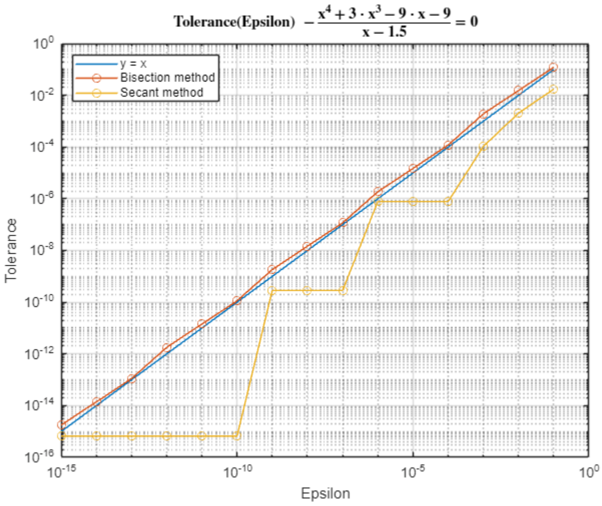


График зависимости погрешности от заданной точности для алгебраической функции с точкой разрыва

9 Оценка порядка методов

9.1 Полином

Были получены следующие реузльтаты:

1. Метод половинного деления

```
Bisection method:
Value:      1.0001142801
Tolerance: 0.0000000000
Iteration: 35
```

```
Bisection method:
Value:      1.0001142801
Tolerance: 0.0000000000
Iteration: 37
```

Результат работы метода половинного деления с $\varepsilon = 10^{-10}$ и $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-11}$

   Делаем вывод, что порядок метода линейный.

2. Метод секущих

```
Secant method:
Value:      1.0001142801
Tolerance: 0.0000000000
Iteration: 9
```

```
Polynomial:
Secant method:
Value:      1.0001142801
Tolerance:  0.0000000000
Iteration:  9
```

Результат работы метода секущих с $\varepsilon = 10^{-10}$ и $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-11}$

Делаем вывод, что порядок метода нелинейный.

9.2 Алгебраическая функция

Были получены следующие реузльтаты:

1. Метод половинного деления

```
Bisection method:
Value:      1.7320508076
Tolerance:  0.0000000000
Iteration:  34
```

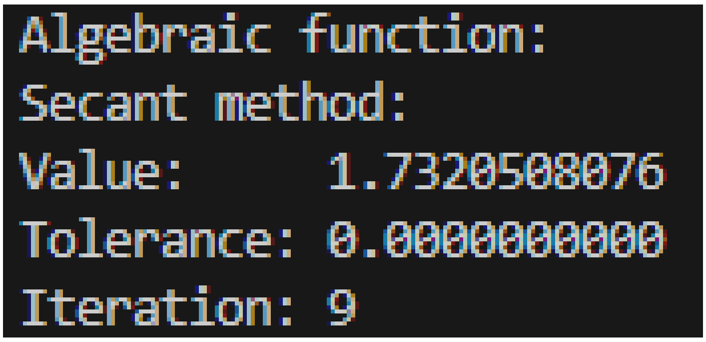
```
Value:      1.7320508076
Tolerance:  0.0000000000
Iteration:  36
```

Результат работы метода половинного деления с $\varepsilon = 10^{-10}$ и $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-11}$

Делаем вывод, что порядок метода линейный.

2. Метод секущих

```
Algebraic function:
Secant method:
Value:      1.7320508076
Tolerance:  0.0000000000
Iteration:  9
```



```
Algebraic function:
Secant method:
Value:     1.7320508076
Tolerance: 0.0000000000
Iteration: 9
```

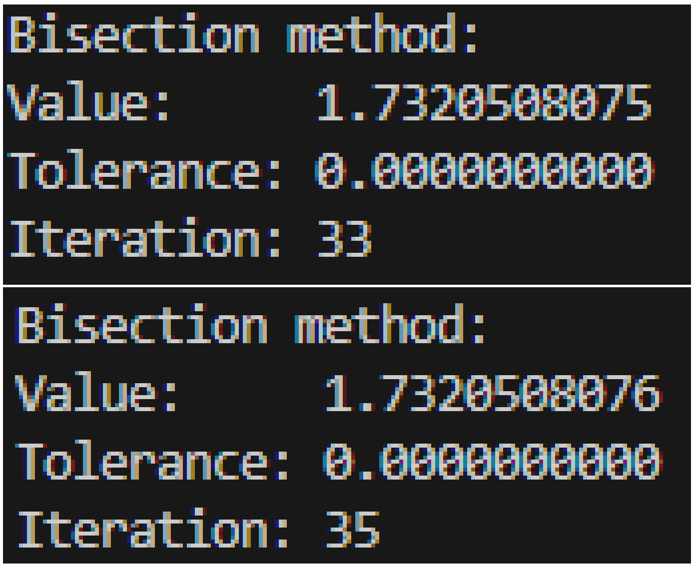
Результат работы метода секущих с $\varepsilon = 10^{-10}$ и $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-11}$

Делаем вывод, что порядок метода нелинейный.

9.3 Алгебраическая функция с разрывом

Были получены следующие реузльтаты:

1. Метод половинного деления



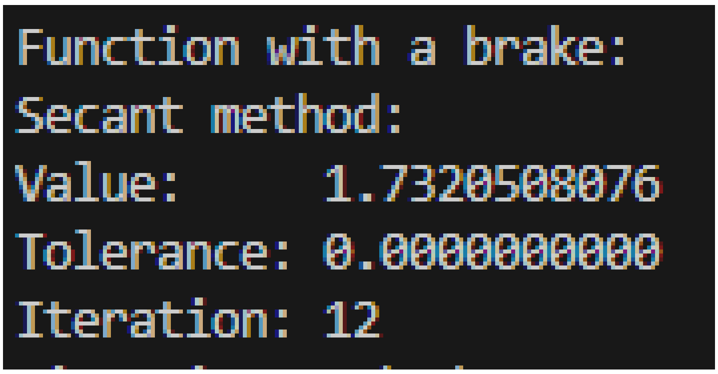
```
Bisection method:
Value:     1.7320508075
Tolerance: 0.0000000000
Iteration: 33
```

```
Bisection method:
Value:     1.7320508076
Tolerance: 0.0000000000
Iteration: 35
```

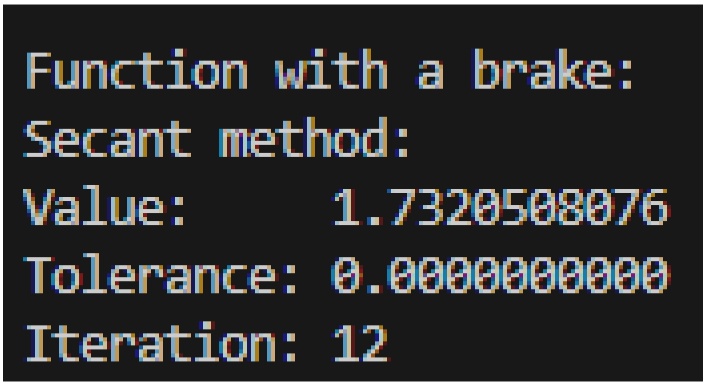
Результат работы метода половинного деления с $\varepsilon = 10^{-10}$ и $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-11}$

Делаем вывод, что порядок метода линейный.

2. Метод секущих



```
Function with a brake:
Secant method:
Value:     1.7320508076
Tolerance: 0.0000000000
Iteration: 12
```



Результат работы метода секущих с $\varepsilon = 10^{-10}$ и $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-11}$

Делаем вывод, что порядок метода нелинейный.

10 Вывод

Решения для трех уравнениий были получены двумя методами - методом половинного деления и методом секущих. При соблюдении условий применимости методов можно найти решение за конечное число итераций с желаемой точностью. Графики, приведенные в пункте 8 показывают, что погрешность вычислений метода секущих не выходит за пределы заданной точности, в свою очередь метод половинного деления практически идентичен заданной точности, иногда ее переходя. Помимо этого были проведены оценки порядков методов, в соответсвии с которыми можно сделать вывод о том, что метод половинного делениЯ имеет линейный порядок.