

Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет

Физико-Механический институт

**Высшая школа прикладной математики и
вычислительной физики**

Лабораторная работа 3

по дисциплине **численные методы**

Решение СЛАУ методами ортогонализации

Вариант задания 3

Выполнил студент гр. 5030102/20002

Глаголев И. А.

Преподаватель

Козлов К. Н.

Санкт-Петербург

2024

Содержание

1	Формулировка задания и его формализация	3
2	Алгоритм метода и условия его применимости	3
3	Предварительный анализ задачи	3
4	Тестовый пример с детальными расчетами для задачи малой размерности	3
5	Подготовка контрольных тестов для иллюстрации метода	3
6	Структура программы	4
7	Зависимость точности от числа обусловленности	5
8	Зависимость времени выполнения от числа обусловленности	6
9	Зависимость относительной погрешности от возмущения вектора свободных членов	7
10	Вывод	8

1 Формулировка задания и его формализация

Задача: решить СЛАУ с помощью QR разложения, т.е. разложить матрицу A на матрицы Q и R , где Q - ортогональная матрица, а R - верхняя треугольная матрица. Затем, проанализировать вычислительную ошибку в зависимости от числа обусловленности, а также зависимость относительной погрешности ответа от малых возмущений столбца свободных членов.

2 Алгоритм метода и условия его применимости

Алгоритм QR разложения:

Ортогонализацией Грамма-Шмидта набора столбцов, составляющих матрицу A получается ортогональная матрица Q ($Q^T = Q^{-1}$), получаем систему $R = Q^T A$. Она принимает вид $QRx = b \iff Rx = Q^T b$ откуда получается решение системы обратным ходом метода Гаусса.

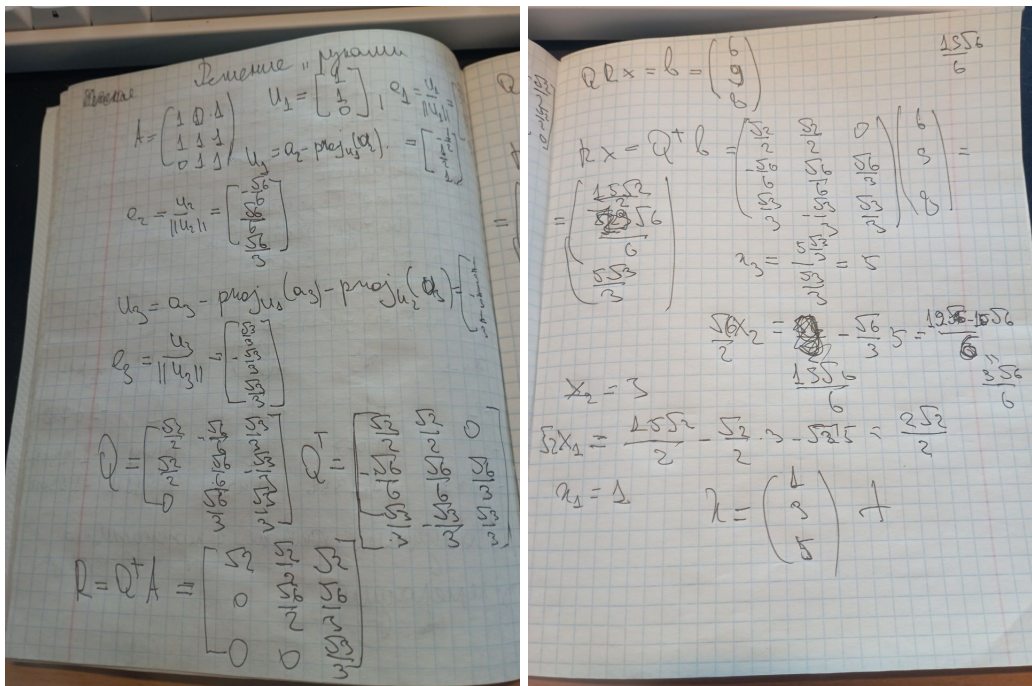
Условие применимости:

$\det(A) \neq 0$, то есть столбцы матрицы A линейнонезависимы.

3 Предварительный анализ задачи

Создается матрица с заданным числом обусловленности, выбирается простой столбец-решение (я выбрал столбец чисел от 1 до $2N-1$, где $N \times N$ - размер матрицы), умножением матрицы на решение получается столбец свободных членов, а дальше решается получившаяся система, и полученный результат сравнивается с точным ответом. Строятся графики зависимости точности ответа и времени работы метода от числа обусловленности матрицы системы, а также зависимости относительной погрешности ответа от малых возмущений столбца свободных членов.

4 Тестовый пример с детальными расчетами для задачи малой размерности



Ручной расчет для метода

5 Подготовка контрольных тестов для иллюстрации метода

Создаются матрицы с заданным числом обусловленности с помощью Matlab

6 Структура программы

Введен тип для векторов:

```
typedef double vec [N];
```

Тип для матриц:

```
typedef double mat [N] [N];
```

Скалярное произведение:

```
double dot (vec v, vec u)
```

Прибавление вектора:

```
void add (vec v, vec u)
```

Вычитание вектора:

```
void sub (vec v, vec u)
```

Умножение на скаляр:

```
void mul (vec v, double a)
```

Умножение матрицы на вектор ($res = m*v$):

```
void apply (mat m, vec v, vec res)
```

Умножение матриц ($res = m*n$):

```
void multiply (mat m, mat n, mat res)
```

Копирование матрицы ($copy = m$):

```
void copy_mat (mat m, mat copy)
```

Получение j-ого столбца матрицы ($res = m[*][j]$):

```
void get_column (mat m, int j, vec res)
```

Получение i-ой строки матрицы ($res = m[i][*]$):

```
void get_row (mat m, int i, vec res)
```

Задание i-ого столбца матрицы ($m[*][i] = col$):

```
void set_column (mat m, int i, vec col)
```

Нормализация столбцов матрицы:

```
void normalize (mat m)
```

Ортогонализация Грамма-Шмидта:

```
void ortogonalize (mat m)
```

QR-разложение ($m = q*r$):

```
void qr_decomposition (mat m, mat q, mat r)
```

Транспонирование матрицы:

```
void transpose (mat m)
```

Обращение верхне-треугольной матрицы ($inv = r^{-1}$):

```
void inverse_r (mat r, mat inv)
```

Обращение матрицы ($inv = m^{-1}$):

```
void inverse (mat m, mat inv)
```

Решение СЛАУ методом QR-разложения:

```
void solve (mat m, vec v, vec sol)
```

Чтение матрицы из файла:

```
void mat_from_file (char* filename, mat m)
```

Красивая печать матрицы:

```
void print_mat(mat m)
```

Красивая печать вектора:

```
void print_vec(vec v)
```

7 Зависимость точности от числа обусловленности

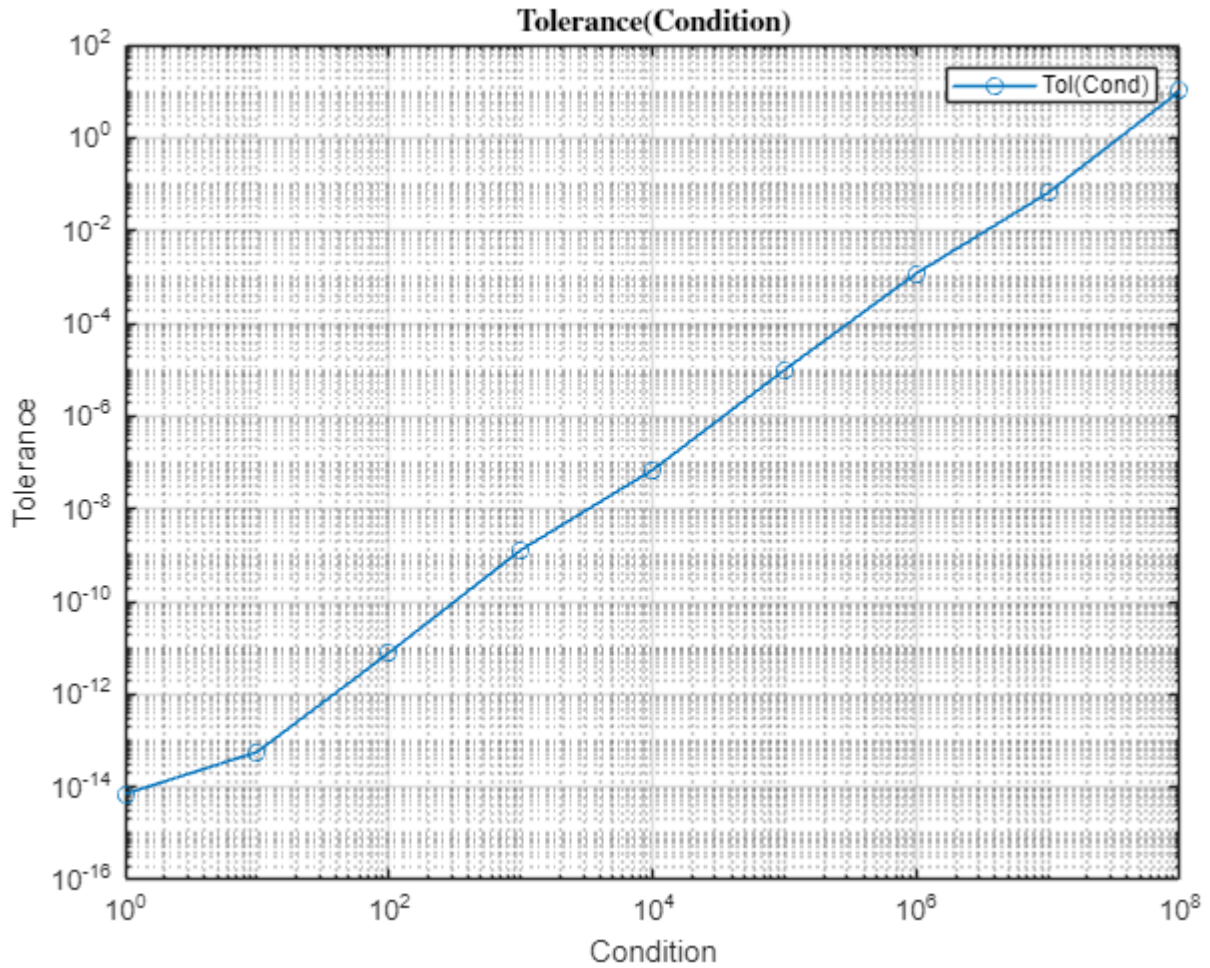


График зависимости точности от числа обусловленности

График представляется логичным, при увеличении числа обусловленности наблюдается падение точности.

8 Зависимость времени выполнения от числа обусловленности

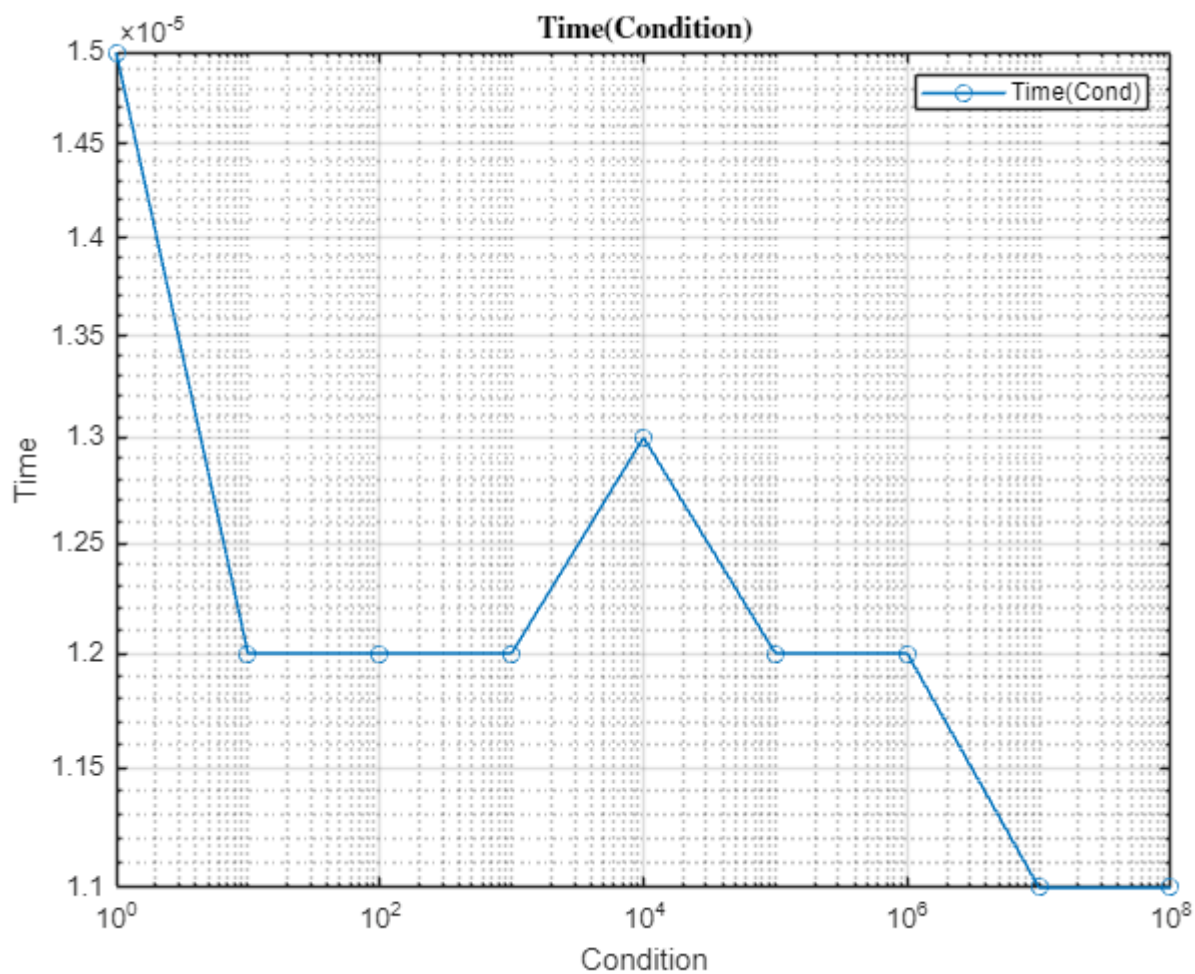


График зависимости времени выполнения от числа обусловленности

Из графика видно, что чем меньше число обусловленности, тем дольше по времени работает алгоритм, однако при обусловленности 10000 видно аномальное увеличение времени, наверняка связанное со случайным характером матриц.

9 Зависимость относительной погрешности от возмущения вектора свободных членов

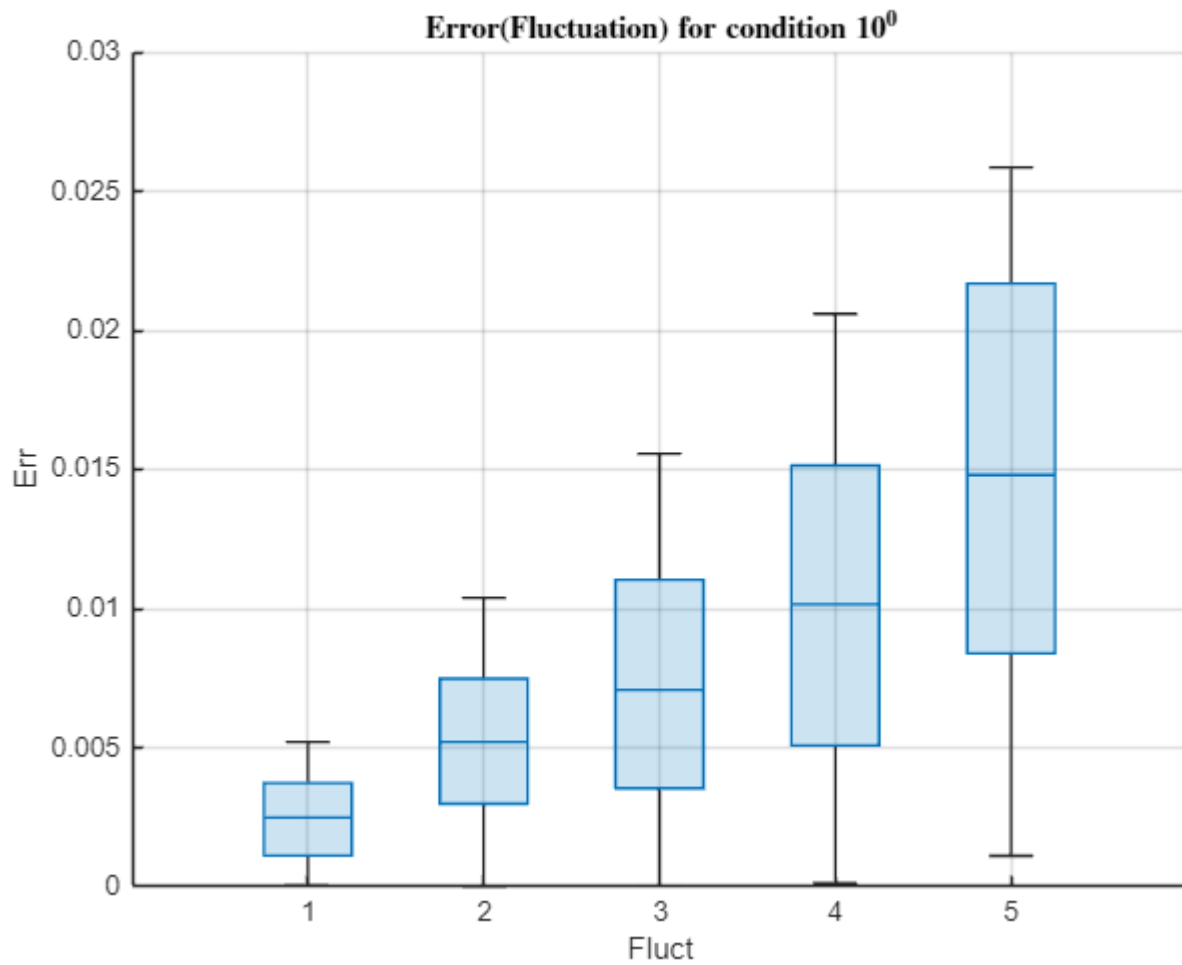


График зависимости относительной погрешности от возмущения для матрицы с числом обусловленности 1

В связи с тем, что на каждое возмущение было проведено по 100 измерений, видно, что чем больше возмущение, тем больше диапазон ошибки, что представляется логичным

10 Вывод

QR - декомпозиция является достаточно простым алгоритмом с приемлимым уровнем погрешности. Важной особенностью QR - декомпозиции можно выделить тот факт, что при малых числах обусловленности, декомпозиция показывает очень высокую точность, однако, также, с увеличением точности, растет и время затрачиваемое на работу алгоритма. При внесении погрешности в вектор свободных членов, метод не показывает аномальных значений ошибки.