Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет

Физико-Механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Лабораторная работа 4

по дисциплине **численные методы**

Решение СЛАУ итерационными методами

Вариант задания 3

Выполнил студент гр. 5030102/20002

Глаголев И. А.

Преподаватель

Козлов К. Н.

Санкт-Петербург

2024

Содержание

1 Формулировка задания и его формализация

Решить СЛАУ методом Ричардсона, т.е. $A = A^T, A > 0, det(A) \neq 0$

Итерационный процесс:
$x^{k+1} = x^k - \alpha_{(k)}(Ax^k - b)$, при $0 < \alpha < \frac{2}{||A||}$, $x^{(k)}$ сходится к решению Ax = b

Затем, проанализировать вычислительную ошибку для матрицы с разными числами обусловленности.

2 Алгоритмы методов и условия их применимости

Алгоритм метода Ричардсона:

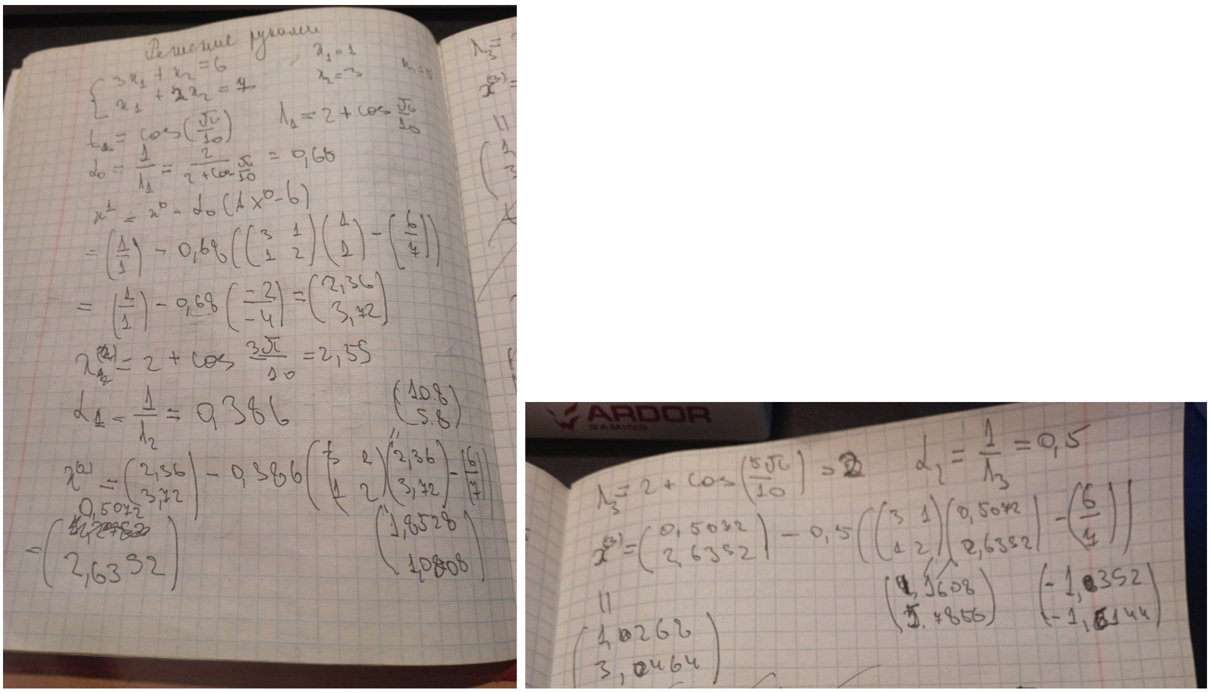
1. Задать m.
2. Вычислить t_k λ_k, k = 1 ... m.
3. Вычислить α_s, s = 0 ... m-1.
4. Подставить в $x^{k+1} = x^k - \alpha_{(k)}(Ax^k - b)$ и вычислить итоговую погрешность.

Условие применимости:
$det(A) \neq 0$, то есть столбцы матрицы A линейнонезависимы.

3 Предварительный анализ задачи

Создается матрица с заданным числом обусловленности, выбирается простой столбец-решение (я выбрал столбец чисел от 1 до N, где N × N - размер матрицы), умножением матрицы на решение получается столбец свободных членов, а дальше решается получившаяся система, и полученный результат сравнивается с точным ответом. Строятся графики зависимости точности ответа и времени работы метода от числа обусловленности матрицы системы, а также зависимости относительной погрешности ответа от малых возмущений столбца свободных членов.

4 Тестовый пример с детальными расчетами для задачи малой размерности



Ручной расчет для обоих методов

5 Подготовка контрольных тестов для иллюстрации метода

Создаются матрицы с заданным числом обусловленности с помощью Matlab

6 Структура программы

Введена структура, в которой удобно хранить необходимую для графиков информацию тип для векторов:

```
struct N_eps {
    double eps;
    int I;
};
```

Введен тип для векторов:

```
typedef double vec[N];
```

Тип для матриц:

```
typedef double mat[N][N];
```

Скалярное произведение:

```
double dot(vec v, vec u)
```

Прибавление вектора:

```
void add(vec v, vec u, vec result)
```

Вычитание вектора:

```
void sub(vec v, vec u, vec result)
```

Умножение на скаляр:

```
void mul(vec v, double a)
```

Умножение матрицы на вектор (res = m*v):

```
void apply(mat m, vec v, vec res)
```

Умножение матриц (res = m*n):

```
void multiply(mat m, mat n, mat res)
```

Копирование матрицы (copy = m):

```
void copy_mat(mat m, mat copy)
```

Копирование вектора (copy = v):

```
void copy_vec(vec copy, vec x))
```

Поиск максимума матрицы:

```
double matrixmax (mat m)
```

Поиск минимума матрицы:

```
vdouble matrixmin (mat m)
```

Ошибка между двумя векторами:

```
double error(vec a, vec b)
```

Чтение матрицы из файла:

```
void mat_from_file(char* filename, mat m)
```

Красивая печать матрицы:

```
void print_mat(mat m)
```

Красивая печать вектора:

```
void print_vec(vec v)
```

Итоговое применение метода Ричардсона:

```
struct N_eps solve(mat m, double eps, int M)
```

7 Зависимость точности от числа обусловленности

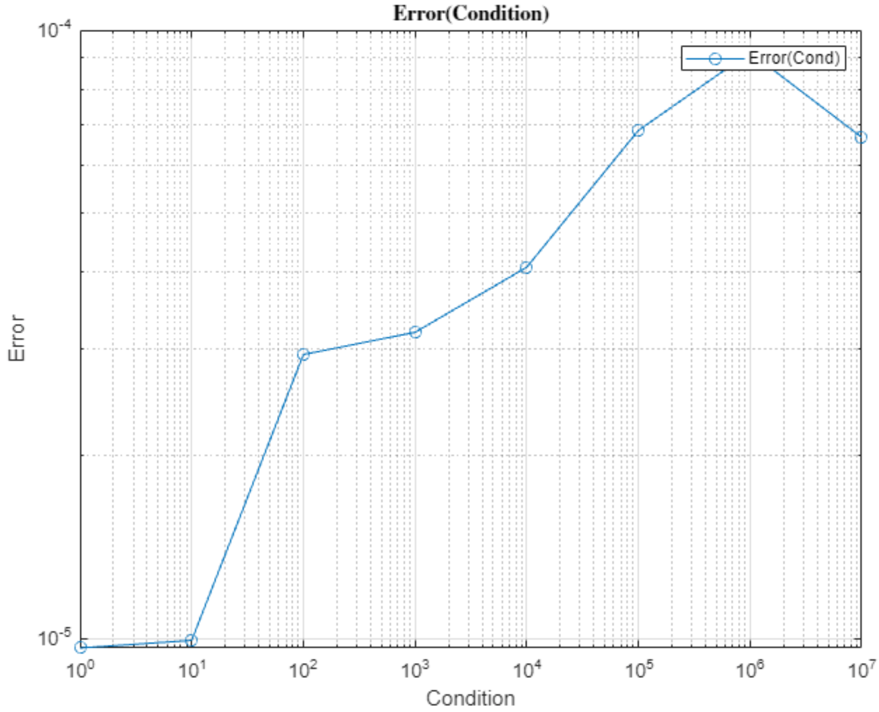


График зависимости точности от числа обусловленности.

Из графика можно сделать вывод, что при малом числе обусловленности, алгоритм имеет крайне высокую точность (значение погрешности 10 при обусловленности 1, вызвано компьюерной ошибкой, которая выдала погрешность равную 10).

8 Зависимость времени выполнения от числа обусловленности

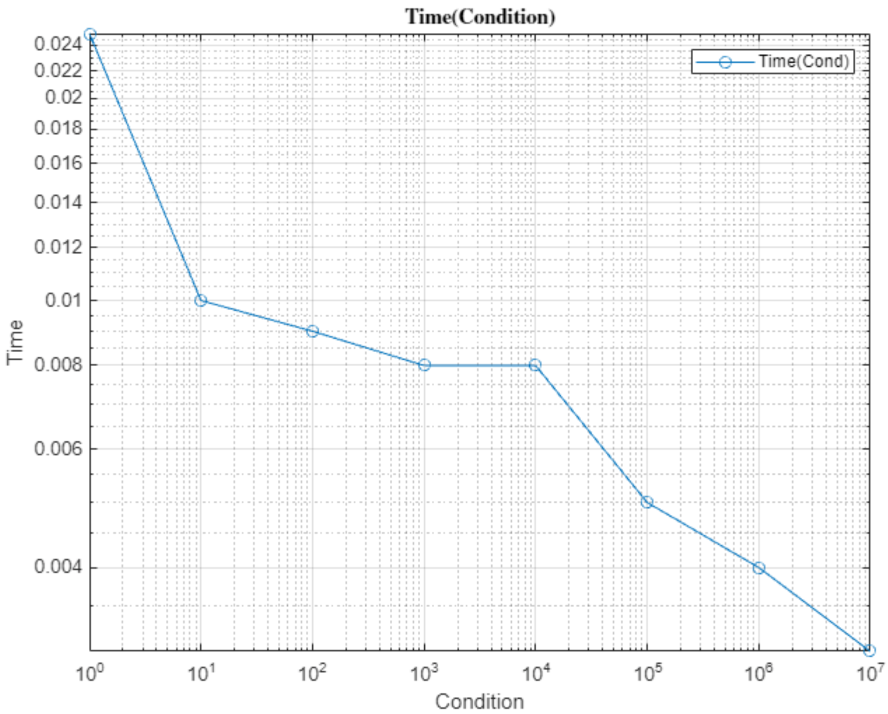
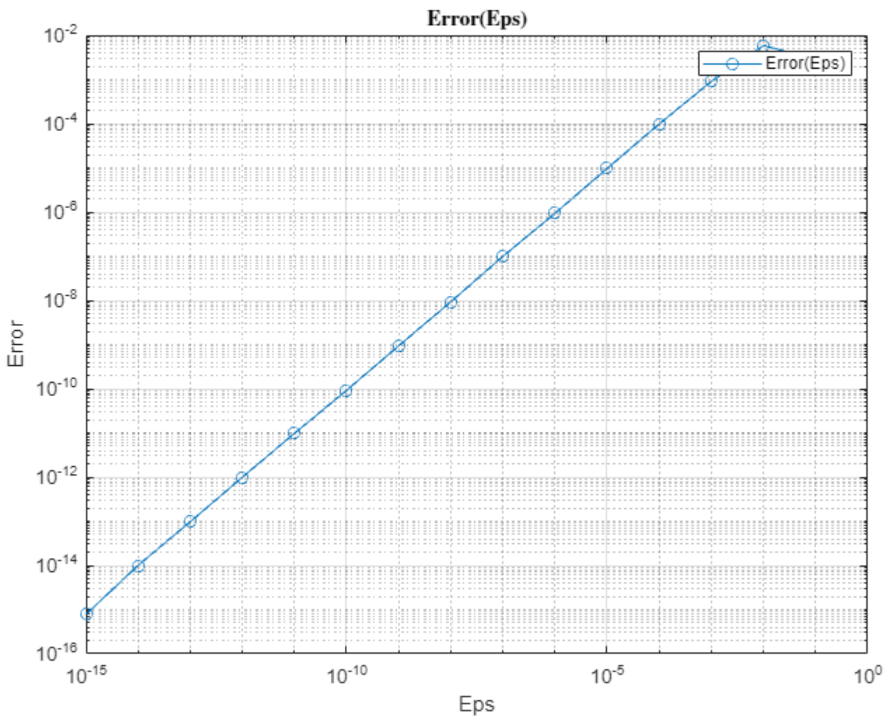
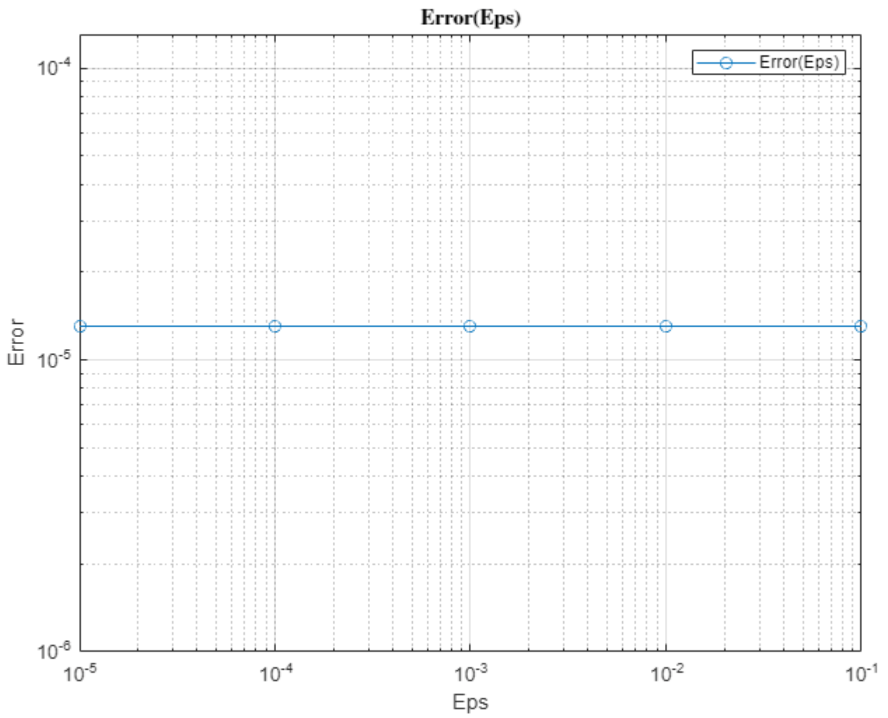


График зависимости времени выполнения от числа обусловленности

Из графика можно сделать вывод, что при малом числе обусловленности, алгоритм работает дольше, чем при больших значениях обусловенности (значение погрешности 0.1 при обусловленности 1, вызвано компьюерной ошибкой, которая выдала погрешность равную 0.1).

9 Зависимость погрешности от заданной точности для матриц плохой и хорошей обусловленности

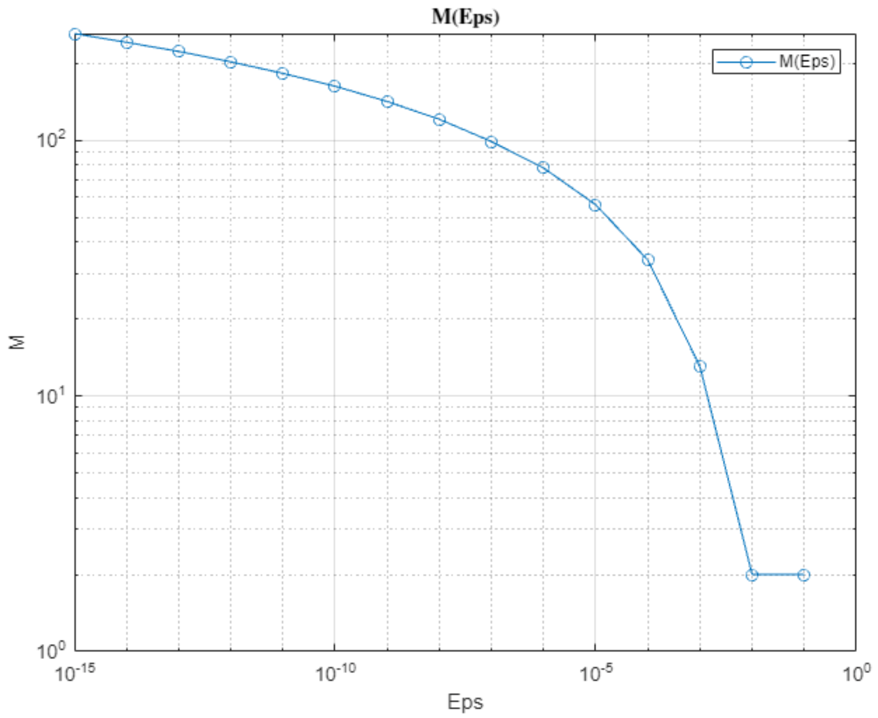


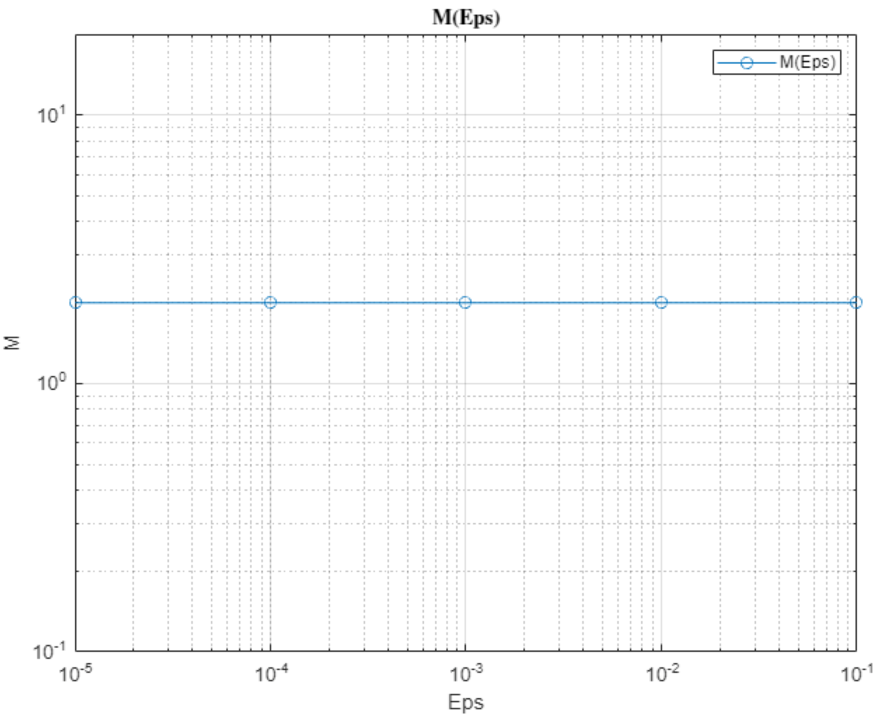


Графики зависимости погрешности от заданной точности для матриц плохой и хорошей обусловленности

График погрешности при хорошем числе обусловленности представляет из себя линию, где при большей точности, уменьшается погрешность. В свою очередь при плохом числе обусловленности график является константой, которая при eps $= 10^{-6}$ не сходится.

10 Требуемое число итераций от заданной точности для матриц плохой и хорошей обусловленности

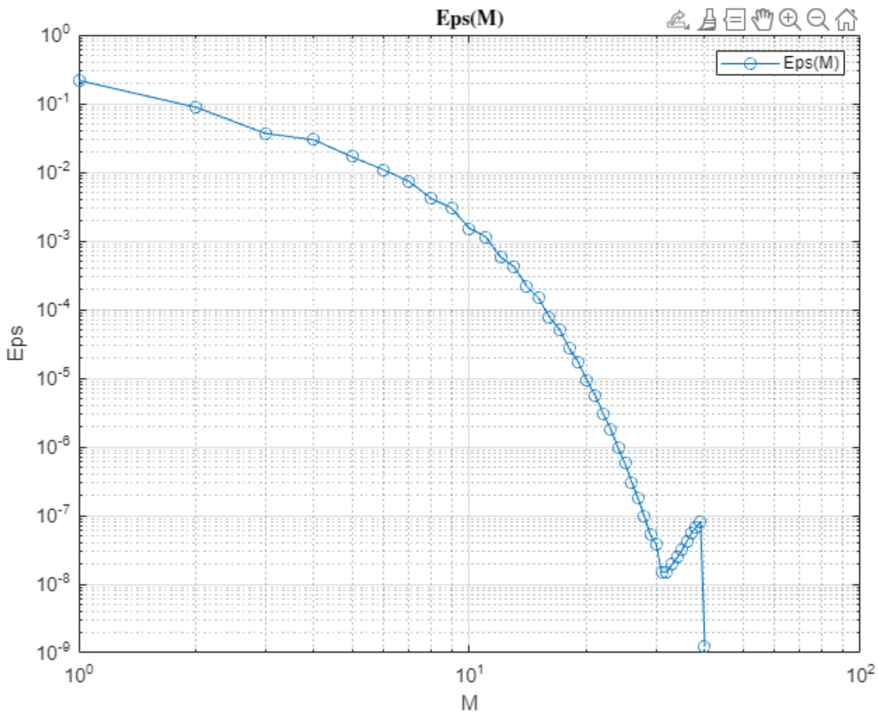


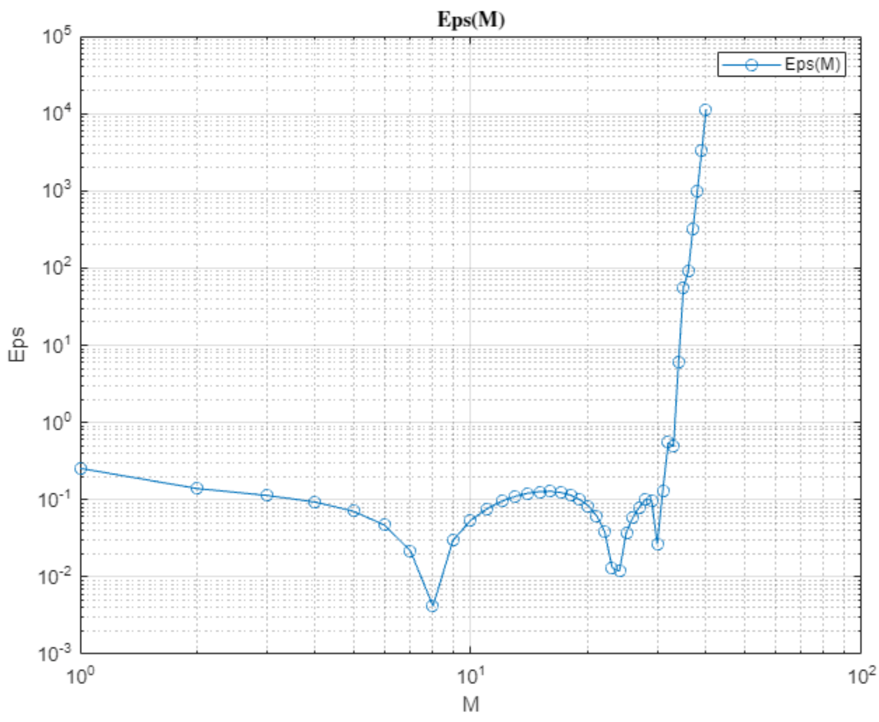


Графики требуемого числа итераций от заданной точности для матриц плохой и хорошей обусловленности

График требуемого числа итераций при хорошем числе обусловленности представляет из себя эксподенциальную зависимость от N, в свою очередь плохое значение все также ведет себя как константа.

11 Уменьшение погрешности с ходом итераций для матриц плохой и хорошей обусловленности





Графики уменьшения погрешности с ходом итераций для матриц плохой и хорошей обусловленности

График уменьшения погрешности с ходом итераций представляет из себя экспоненту быстро стремящуюся вниз, то есть, очень быстро увеличивающую точность, в свою очередь график при плохом числе обусловленности наоборот, как экспонента стремится вверх, то есть к увеличению погрешности, а значит и расхождению.

12 Вывод

Метод Ричардсона показался мне сложным в реализации, а также неочевидным в вопросе выбора m (кол-во рассчетов итерационных шагов.).

Также, метод показал, что при плохом числе обусловленности, он имеет свойство расходиться, что на мой взгляд, не делает его надежным.