

Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет

Физико-Механический институт

**Высшая школа прикладной математики и
вычислительной физики**

Лабораторная работа 6

по дисциплине **численные методы**

Решение АПСЗ. Методы на основе степенного

Вариант задания 3

Выполнил студент гр. 5030102/20002

Глаголев И. А.

Преподаватель

Козлов К. Н.

Санкт-Петербург

2024

Содержание

1	Формулировка задания и его формализация	3
2	Алгоритм метода и условия его применимости	3
3	Предварительный анализ задачи	3
4	Тестовый пример с детальными расчетами для задачи малой размерности	3
5	Подготовка контрольных тестов для иллюстрации метода	3
6	Структура программы	4
7	Зависимость относительной погрешности определения СЧ и СВ от отделимости	5
8	Зависимость погрешности СЧ и СВ от заданной точности СЧ	6
9	Зависимость числа итераций от заданной точности при хорошей и плохой отделимости искомого собственного числа	7
10	Изменение погрешности с ходом итераций	8
11	Вывод	9

1 Формулировка задания и его формализация

Найти наибольшее по размеру собственное число матрицы степенным методом с нормировкой и сдвигом для улучшения сходимости. Построить графики зависимости погрешности определения СЧ и СВ от отделимости, зависимости погрешности СЧ и СВ от заданной точности СЧ, зависимости числа итераций от заданной точности при хорошей и плохой отделимости искомого собственного числа, изменения погрешности с ходом итераций.

2 Алгоритм метода и условия его применимости

Пусть матрица A - простой структуры. Пусть собственные числа упорядочены по модулю $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$, $x^{(0)}$ произвольный вектор из R^n .

Произведем сдвиг $\mu_0 = \frac{\lambda_2 + \lambda_n}{2}$.

Матрица $B = A - \mu_0 E$.

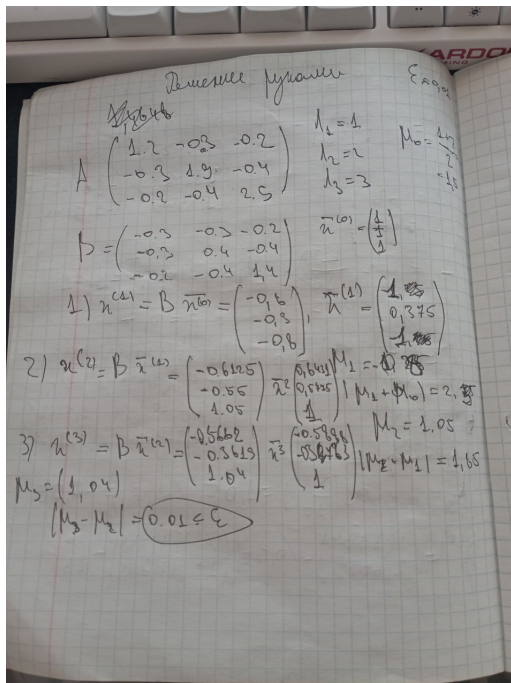
Будем проводить следующий итерационный процесс:

$x^{(k)} = Bx^{(k-1)}$, $k = 1, \dots, i$, затем новый вектор нормируется и процесс повторяется. По итогу $\lim_{k \rightarrow \infty} (x^{(k)}) = x$ - собственный вектор, $\lim_{k \rightarrow \infty} (\mu_k) = \lambda_1$ - максимальное собственное число.

3 Предварительный анализ задачи

Создается матрица с заданным числом отделимости собственных чисел, и соответствующими собственными числами. С помощью степенного метода находится значение наибольшего СЧ и соответствующего СВ. Затем анализируется зависимость погрешности определения СЧ и СВ от отделимости, зависимость погрешности СЧ и СВ от заданной точности СЧ, зависимость числа итераций от заданной точности при хорошей и плохой отделимости искомого собственного числа, изменение погрешности с ходом итераций.

4 Тестовый пример с детальными расчетами для задачи малой размерности



Ручной расчет для метода

5 Подготовка контрольных тестов для иллюстрации метода

Создаются матрицы с заданным числом отделимости с помощью Matlab

6 Структура программы

Введен тип для векторов:

```
typedef double vec[N];
```

Тип для матриц:

```
typedef double mat[N][N];
```

Структура для удобного сбора данных:

```
struct result {  
    double lambda;  
    int M;  
};
```

Скалярное произведение:

```
double dot(vec v, vec u)
```

Функция для вычисления сдвига:

```
void shift(mat m, double s)
```

Умножение матрицы на вектор ($res = m*v$):

```
void apply(mat m, vec v, vec res)
```

Функция нормализации:

```
void normalize(vec v)
```

Функция для вычисления ошибки между векторами:

```
double error_vector(vec x, vec x1)
```

Копирование вектора ($copy = v$):

```
void copy_vec(vec v, vec copy)
```

Чтение матрицы из файла:

```
void mat_from_file(char* filename, mat m)
```

Чтение вектора из файла:

```
void vec_from_file(FILE* f, vec v)
```

Красивая печать матрицы:

```
void print_mat(mat m)
```

Красивая печать вектора:

```
void print_vec(vec v)
```

Реализация степенного метода со сдвигом:

```
struct result solve(mat m, vec x, double shift_v, double eps, vec eigen_vector, double
```

7 Зависимость относительной погрешности определения СЧ и СВ от отделимости

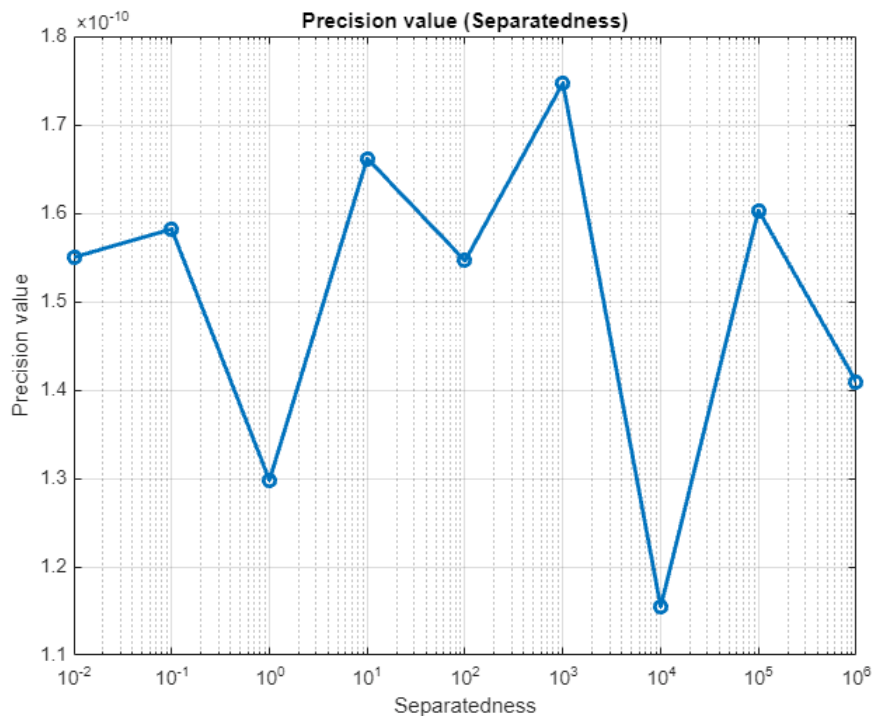


График зависимости относительной погрешности СЧ от числа отделимости

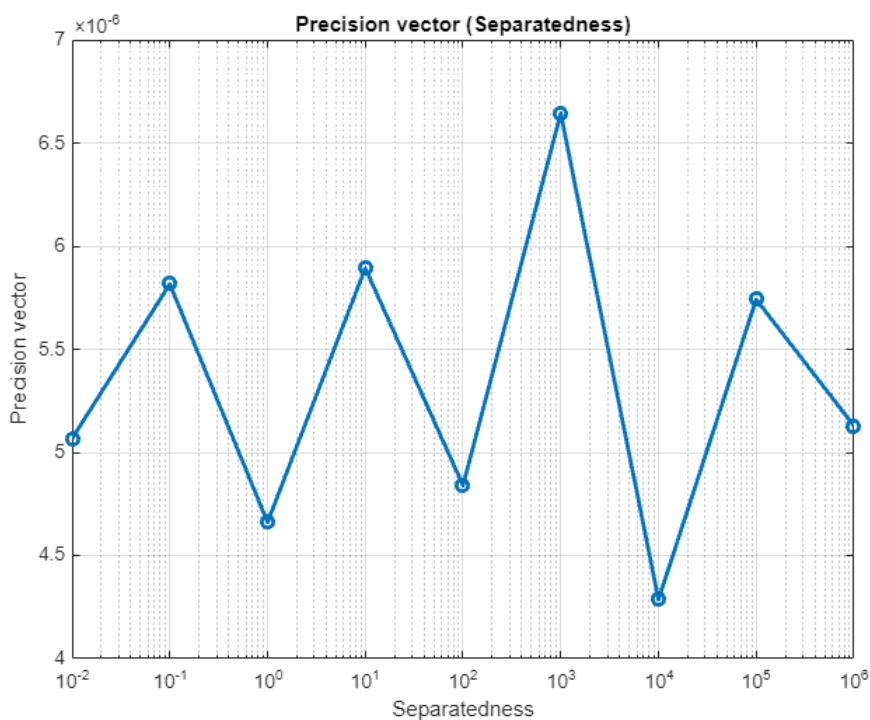


График зависимости относительной погрешности СВ от числа отделимости

Исходя из графика, видно что относительная погрешность СЧ практически не изменяется в зависимости от числа отделимости.

8 Зависимость погрешности СЧ и СВ от заданной точности СЧ

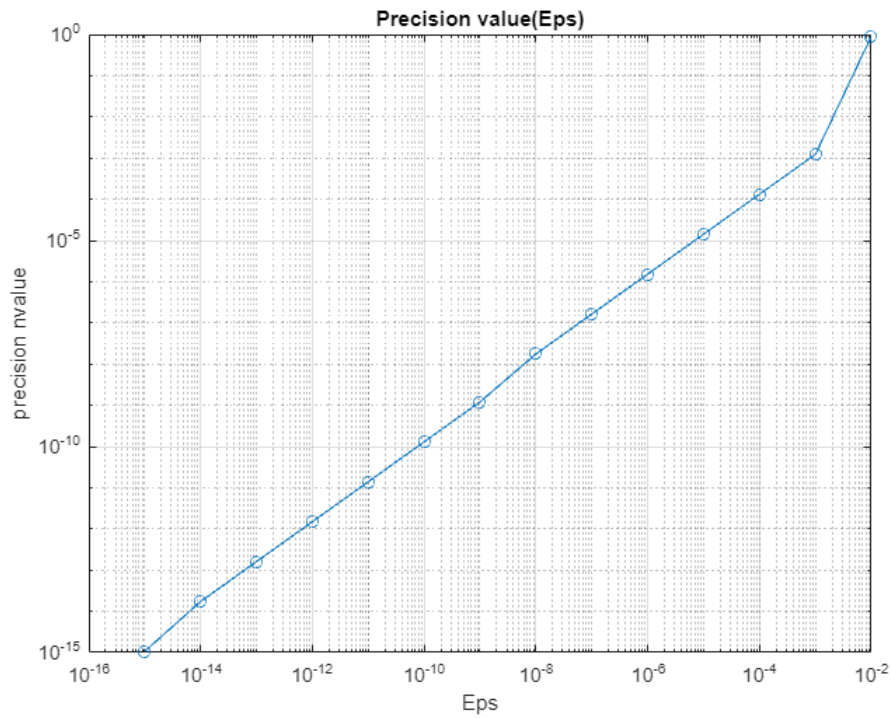


График зависимости относительной погрешности СЧ от заданной точности СЧ

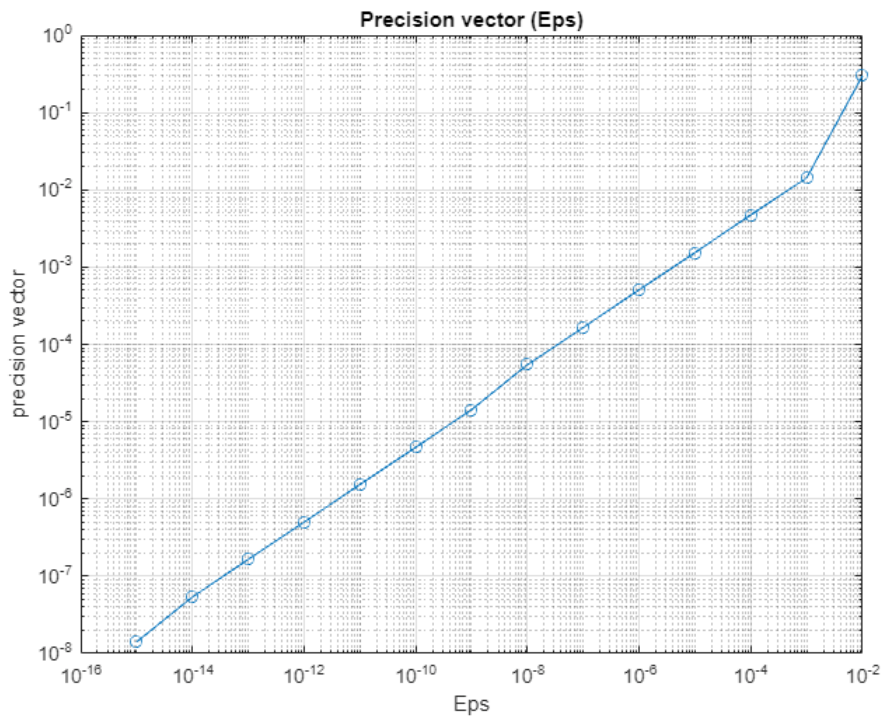


График зависимости относительной погрешности СВ от заданной точности СЧ

Зависимости относительной погрешности СЧ и СВ от заданной точности СЧ представляется вполне логичным, при меньшей точности, увеличится погрешность.

9 Зависимость числа итераций от заданной точности при хорошей и плохой отделимости искомого собственного числа

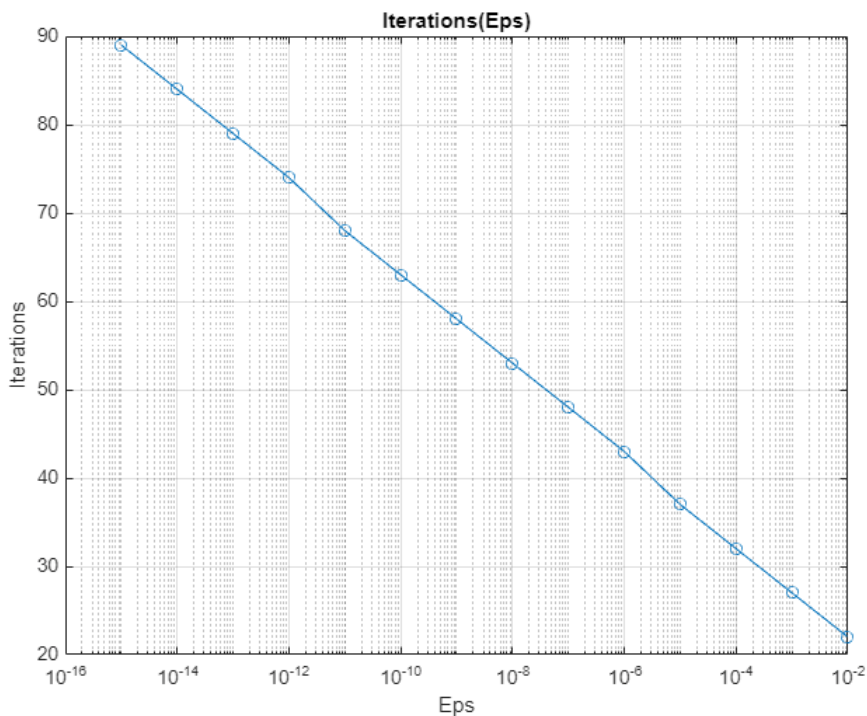


График зависимости числа итераций от заданной точности при числе отделимости 0.01

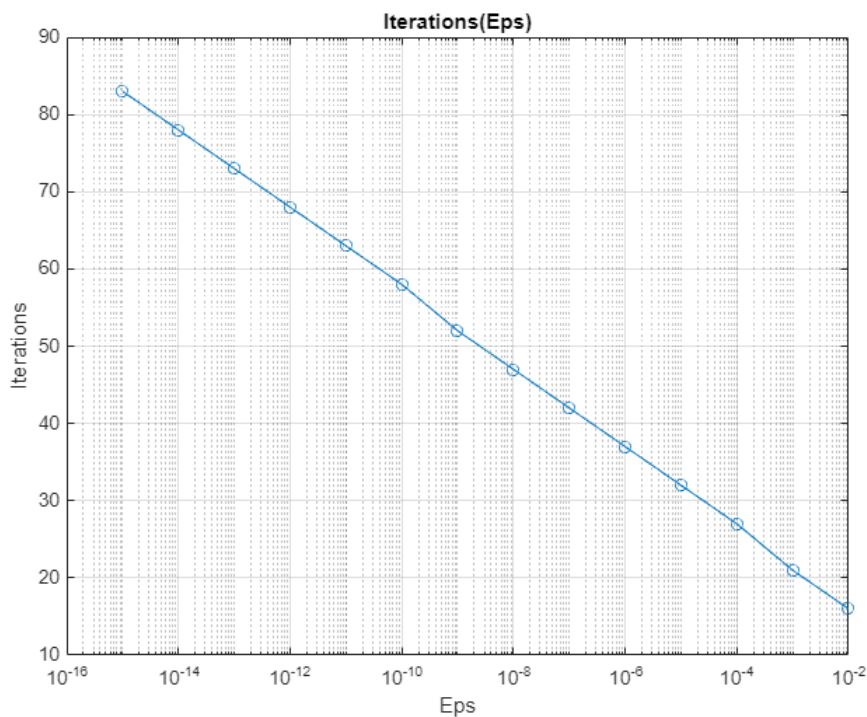


График зависимости числа итераций от заданной точности при числе отделимости 100

Исходя из графиков, чем меньше число отделимости, тем **больше** (по итогу изменилось) требуется итераций, для достижения определенной точности. Сам же график представляет из себя линейный график.

10 Изменение погрешности с ходом итераций

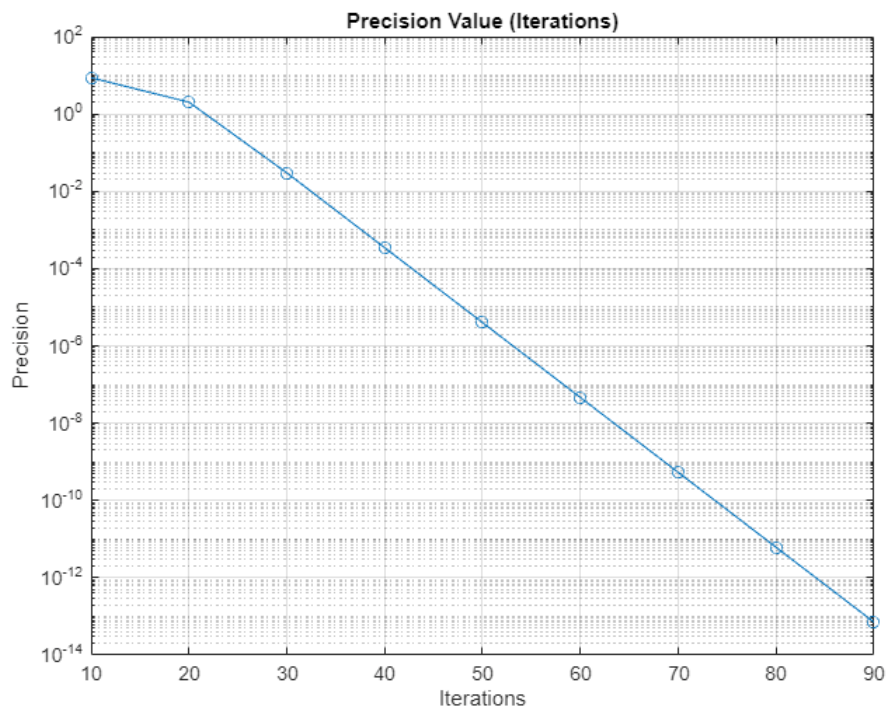


График зависимости изменения относительной погрешности СЧ с ходом итераций

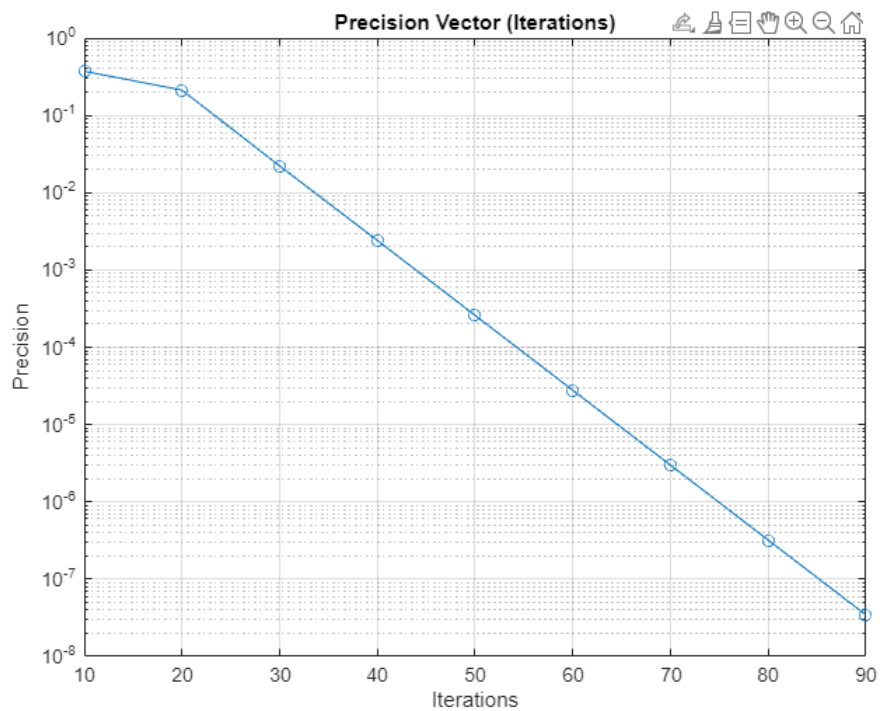


График зависимости изменения относительной погрешности СВ с ходом итераций

Аналогично прошлому графику, видно, что графики зависимости погрешности СЧ и СВ с ходом итераций представляет из себя линейную зависимость.

11 Вывод

В ходе работы использовался степенной метод с нормировкой и сдвиг для улучшения сходимости. Исходя из проведенных исследований, можно заключить, что данный метод эффективен при большом числе отделимости. Однако и при малых значениях отделимости, все необходимые данные могут быть получены с заданой точностью