Санкт-Петербургский Политехнический Университет
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Отчет по лабораторной работе № 11
"Решение интегралов с помощью квадратурных формул типа Гаусса"
дисциплина "Численные методы"

Выполнил студент гр. 5030102/20003 Ляпустин Е.О.
Преподаватель Козлов К.Н.

Апрель, 2024

Формулировка задачи и ее формализация

Формализация задачи:

Вычисление приближенного значения определенного интеграла с помощью квадратурной формулы Чебышева 3 слагаемых

Поставленные задачи:

1. Вычислить точное значение интеграла от функции на отрезке.
2. Построить квадратурные формулы, решив нелинейную систему для узлов и коэффициентов без использования ортогональных полиномов, при решении системы использовать симметрию.
3. Ручной расчет провести для 2 и 4х разбиений отрезка, оценить точность вычисления интеграла.
4. Написать программу для вычисления приближенного значения интеграла с заданной точностью. Вместо правила Рунге для формул Гаусса используем простейший подход, сравнивая значения интегралов для формул для n и $n+1$. Для достижения точности используем адаптивное разбиение исходного отрезка на части.
5. График зависимости фактической ошибки от заданной точности, отметить линию биссектрисы.
6. Уточнить значение интеграла с помощью поправки Ричардсона. Построить линию фактической ошибки для уточненного значения интеграла.
7. График зависимости числа итераций от заданной точности.
8. График фактической ошибки от длины отрезка разбиения, использовать логарифмический масштаб по основанию 2. По графику определить порядок точности применяемой формулы и вычислить константу.

Также, вариант подразумевает выполнение следующего доп. задания:

Модифицировать функцию, добавивь модуль или sign, для получения разрыва первой производной вблизи середины отрезка, выполнить п.5 и 7.

Алгоритм метода

1. Решив нелинейную систему определяющих уравнений, получить таблицу значений узлов (для интеграла от -1 до 1).

2. Получить значение интеграла на отрезке заданном отрезке

3. Повторять действия рекурсивно разбивая на 2 те отрезки разбиений исходного отрезка, для которых разница между формулами n и n+1 больше заданной погрешности.

Предварительный анализ задачи

Вариант подразумевает вычисление определенного интеграла функции

$$(x^5 - 2.9x^3 + 6.5x^2 - 7x)/cos(2x) \tag{1}$$

Пределы интегрирования выбраны следующие: $[0; \pi/5]$.

Точным значением интеграла на этом отрезке буду считать -1.58239716532474

Для дополнительного задания, в качестве функции, имеющей разрыв в середине отрезка интегрирования, выберу следующую:

$$sgn(x^5 - 2.9x^3 + 6.5x^2 - 7x + \pi/2)/cos(2x) \tag{2}$$

При таком изменении примерно в середине отрезка разбиения возникает разрыв.

Точное значение: -0.294286600939167

Ручные расчеты

Ручные расчеты добавил отдельными pdf файлами в репозиторий

Модульная структура программы и контрольные тесты

Контрольные тесты

Модульная структура программы

```
double f(double x);
```

- функция по варианту, (1)

```
double f_modified(double x);
```

- функция, (2)

```
double chebyshev_method(double(*f)(double),
                    double a1, double b1, int n, double** tab);
```

- функция, реализующая метод Чебышева; a1, b1 - границы отрезка интегрирования, n - число слагаемых в квадратурной формуле, tab - заранее подсчитаные значения точек, решение системы определяющих уравнений

```
double find_approx_integral(double(*f)(double),
            double a, double b, int n, int power,
                    int* counter, double* length, int richardson);
```

- функция, возвращающая значение интеграла заданой точности 10^{-power}, a и b - границы отрезка интегрирования, counter - число итераций (ссылка), length - наименьшая длина отрезка разбиения (ссылка), richardson - флаг, определяющий использование уточнения Ричардсона

```
double adaptive_divdouble adaptive_div(double(*f)(double),
        double** xx_tab,double a,double b,int n, int power,
                double S_n,double S_n_plus_1,int *N,double* len)
```

- функция, реализующая адаптивное разбиение отрезка. Аргументами принимает аргументы функции метода, а также значения формулы n слагаемых (S_n) и n+1 (S_n_plus_1)

Численный анализ решения

Основное задание

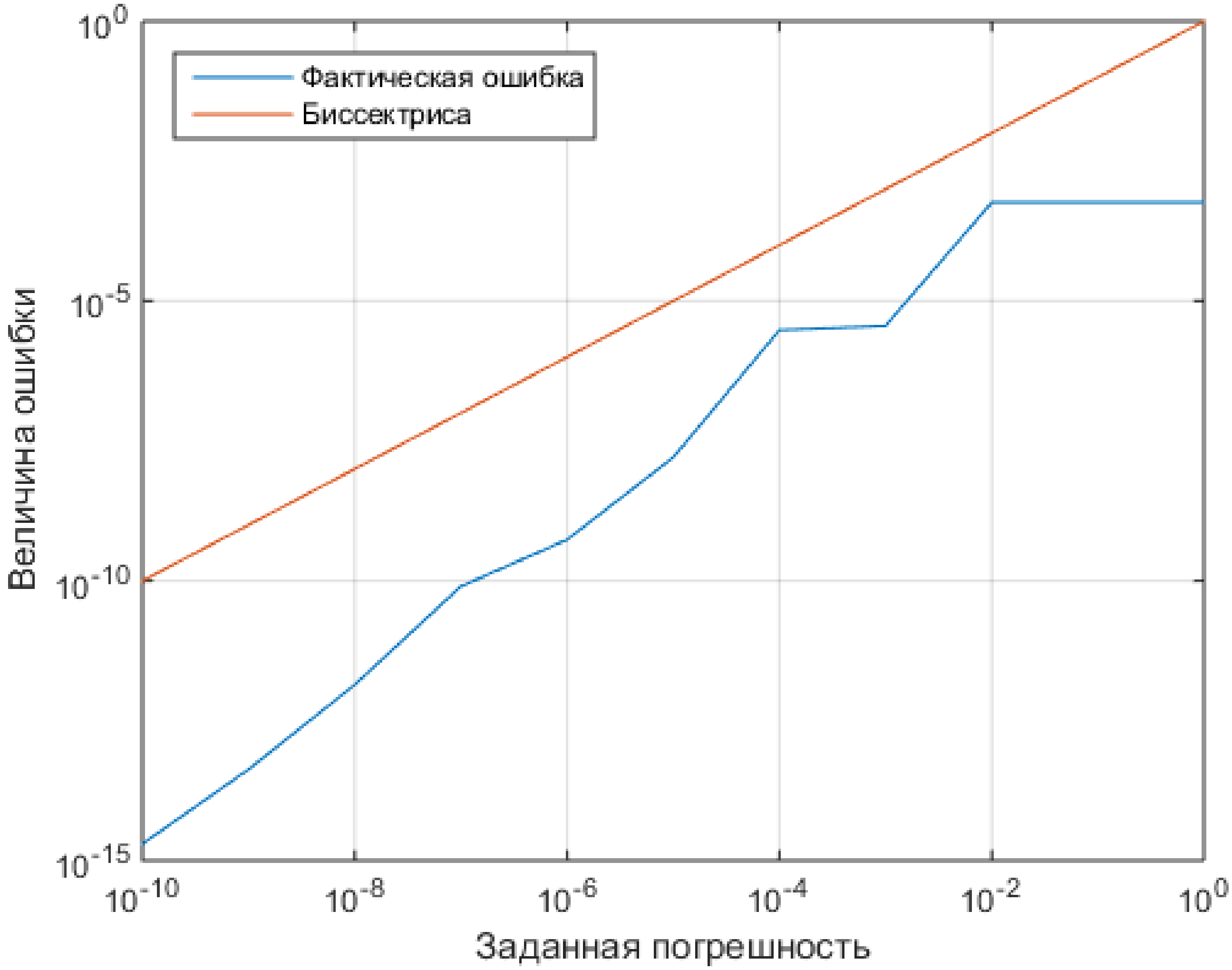

Рис. 1: Зависимость фактической ошибки от заданной

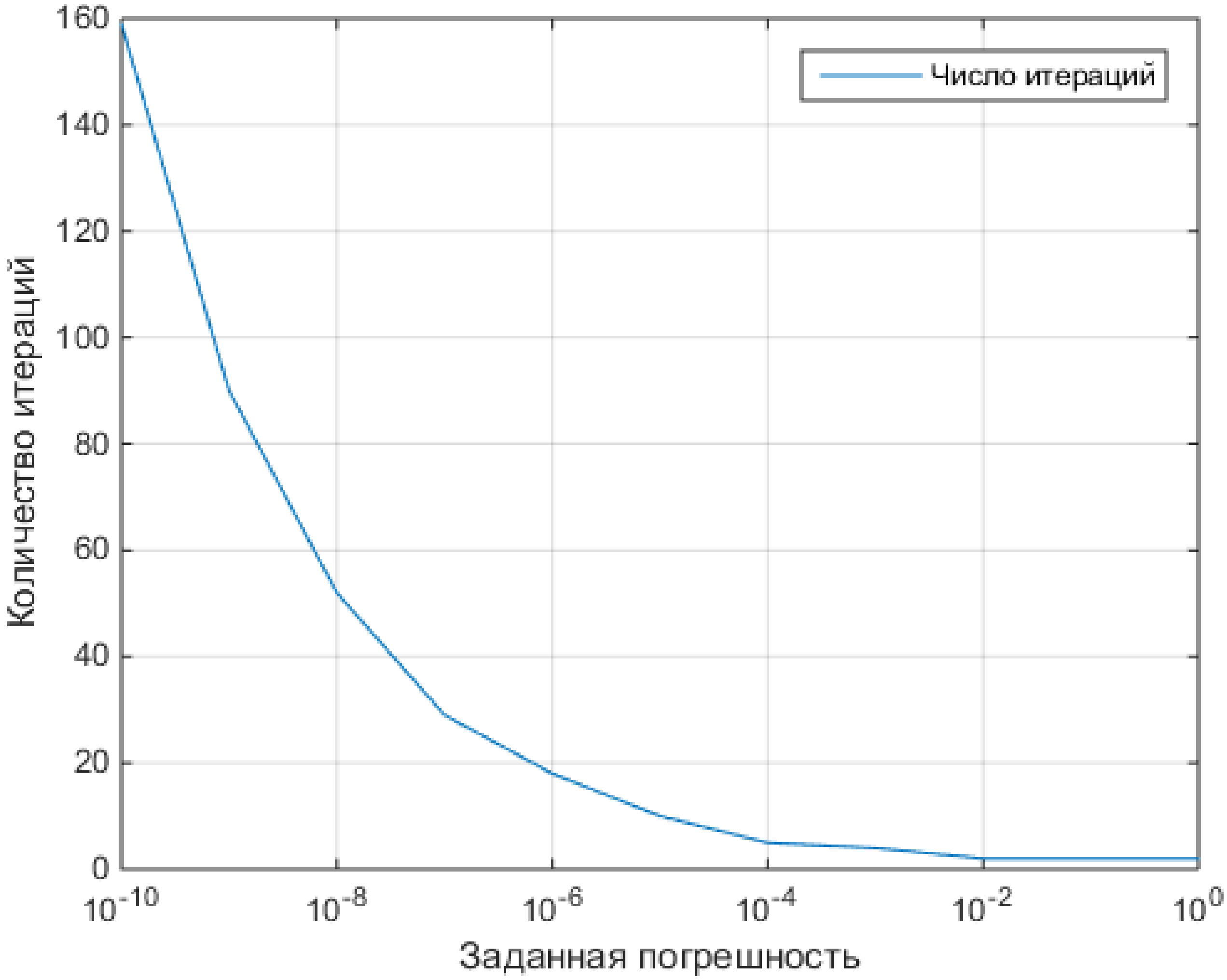

Рис. 2: Зависимость числа итераций от заданной погрешности

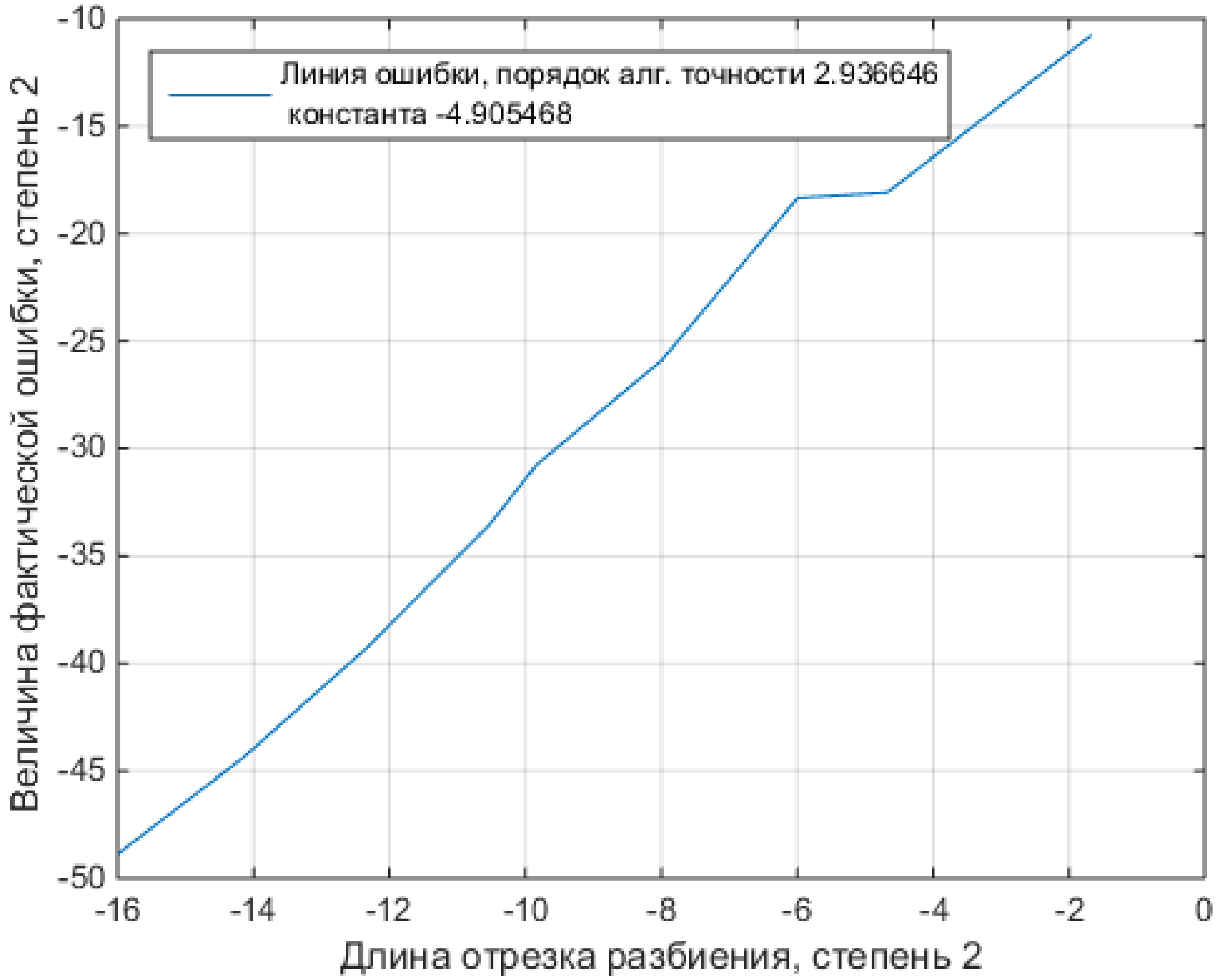

Рис. 3: Зависимость ошибки от минимальной длины отрезка разбиения

Уточнение Ричардсона

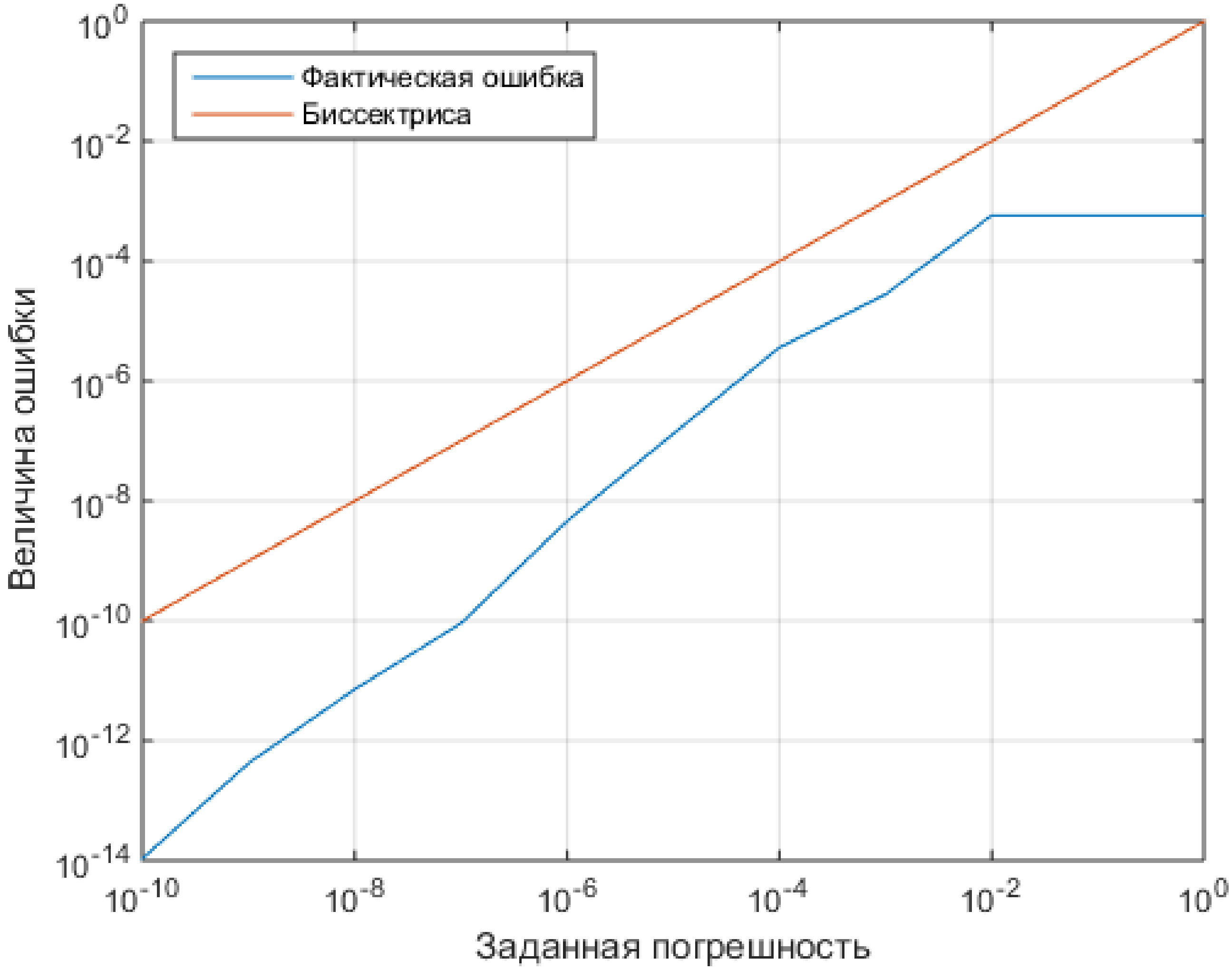

Рис. 4: Зависимость фактической ошибки от заданной (уточнение Ричардсона)

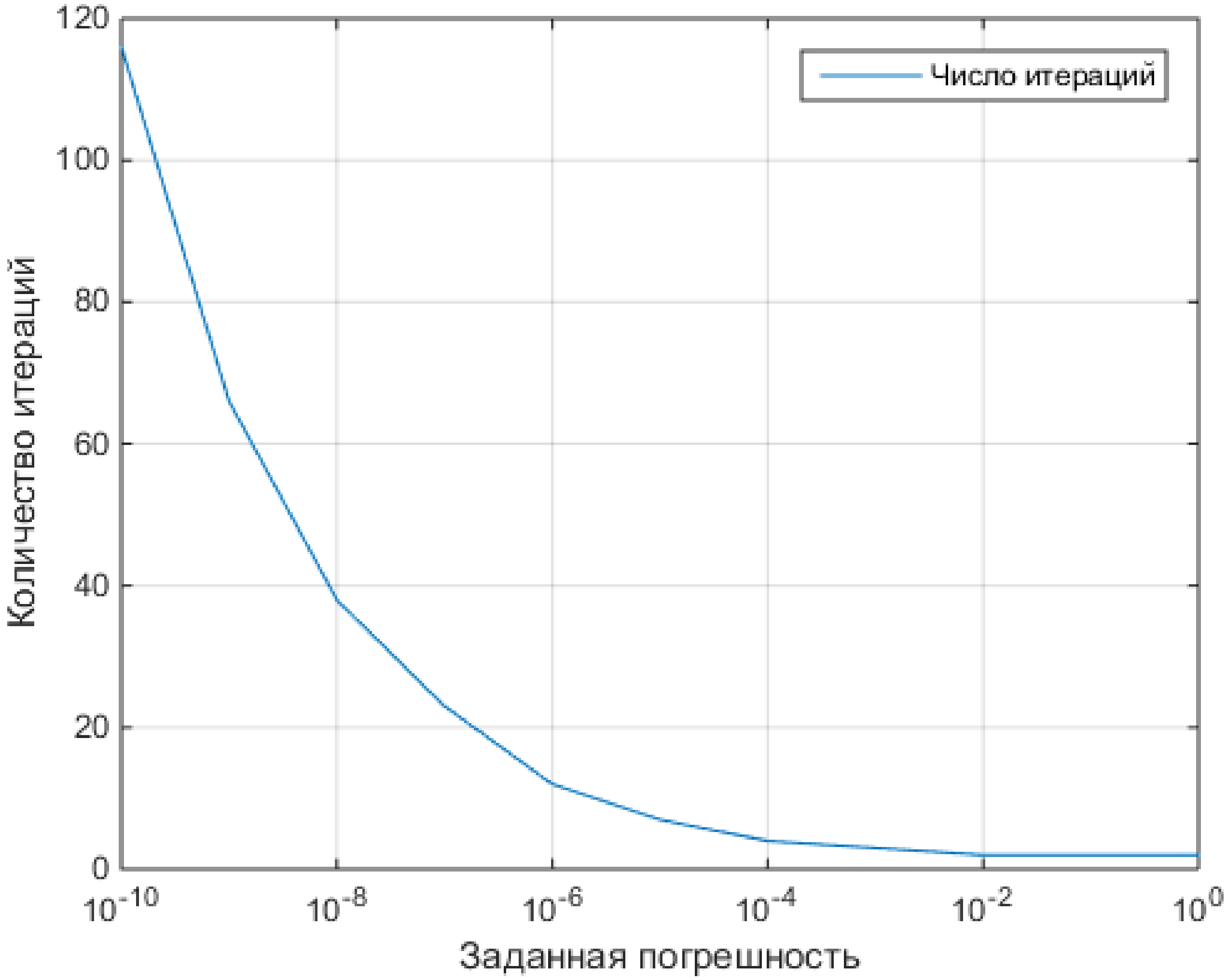

Рис. 5: Зависимость числа итераций от заданной точности (уточнение Ричардсона)

Дополнительное задание

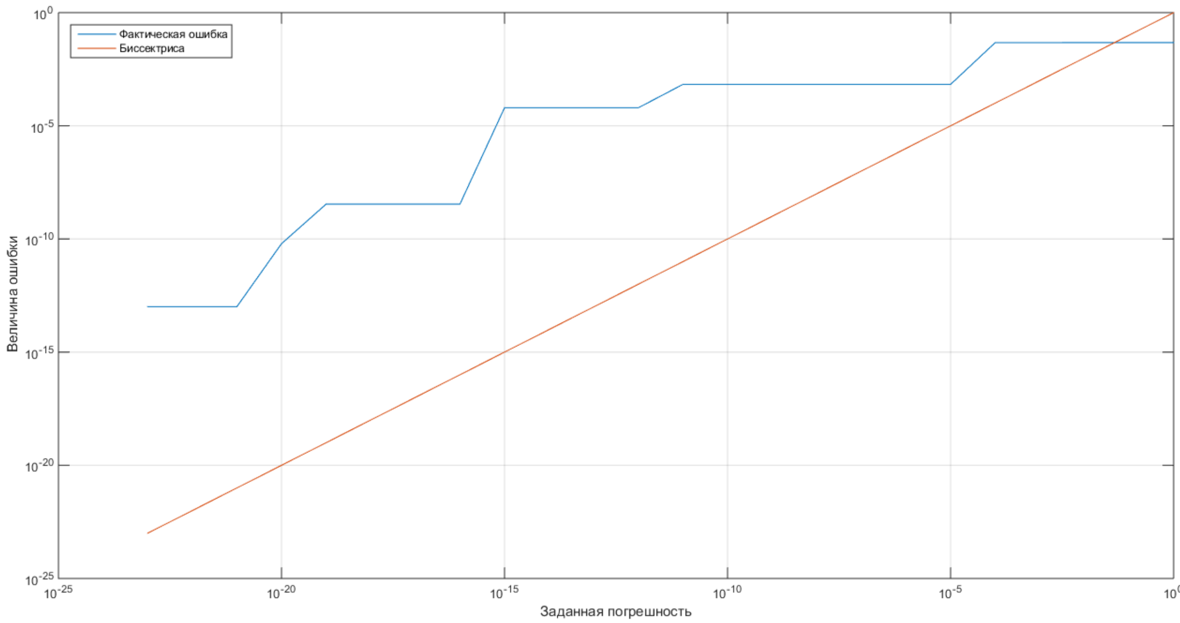

Рис. 6: Зависимость фактической ошибки от заданной точности, функция (2)

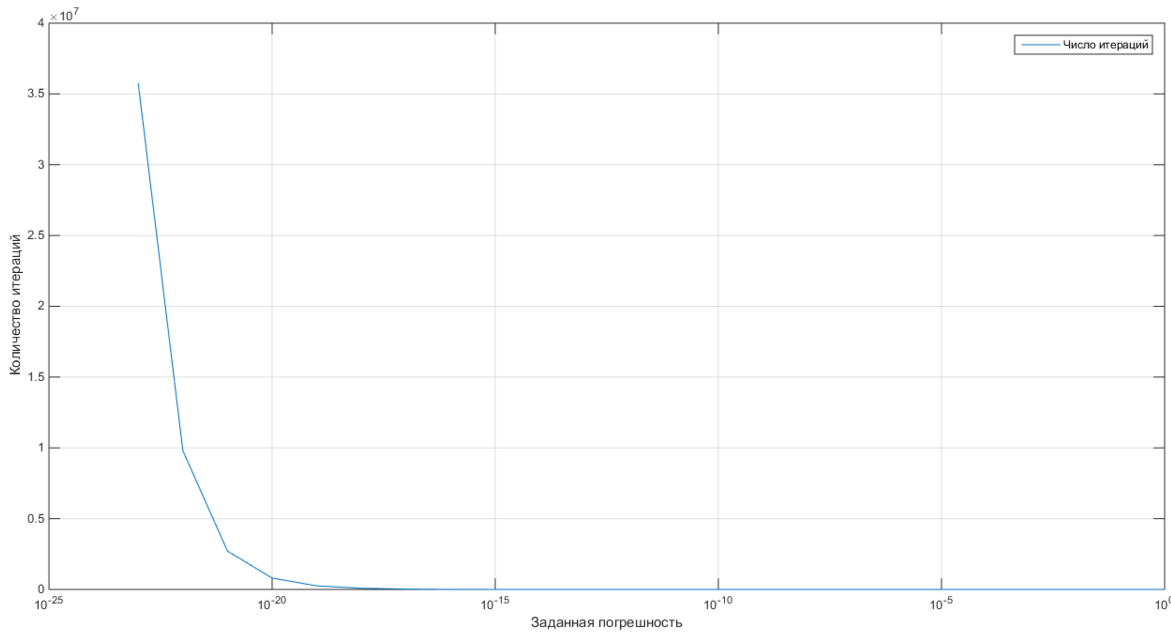

Рис. 7: Зависимость числа итераций от заданной погрешности, функция (2)

Выводы

1. Метод Чебышева позволяет вычислять интегралы с достаточно высокой заданной точностью
2. Число итераций при обращении к уточнению Ричардсона заметно снижается (рисунки 2 и 5)
3. Для функции с разрывом в середине отрезка интегрирования процесс является сходящимся, однако сходится он значительно медленнее, чем для функции без разрыва (рисунок 6)
4. Для достижения ясности картины сходимости процесса для функции 2 пришлось задавать точность до 10^{-22}