Санкт-Петербургский Политехнический Университет
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Отчет по лабораторной работе № 12 "Решение задачи Коши для ОДУ 1 порядка методами Рунге-Кутты" дисциплина "Численные методы"

Выполнил студент гр. 5030102/20003 Ляпустин Е.О.
Преподаватель Козлов К.Н.

Апрель, 2024

Формулировка задачи и ее формализация

Формализация задачи:

Найти решение ОДУ первого порядка методом Эйлера. Также найти решение заданой точности с помощью правила Рунге.

Поставленные задачи:

1. Иллюстрация работы метода. Построить графики точного и численных решений для двух фиксированных значений шага на отрезке. Построить график ошибки на отрезке для этих решений.

2. Исследование точности метода. Заданная точность достигается по правилу Рунге на каждом шаге, кроме метода Кутты-Мерсона. Построить график изменения шага по отрезку. Построить график зависимости фактической погрешности от заданной точности.

3. Исследование сходимости метода. Построить зависимость фактической ошибки от фиксированного шага интегрирования, использовать логарифмическую шкалу по основанию 2. Оценить порядок метода.

Также, вариант подразумевает выполнение следующего доп. задания:

Внести погрешность 1%, 2%, 3%, 4%, 5% в начальное условие. Требуется вычислить относительную ошибку для каждого значения максимального возмущения и построить график. Эксперимент выполняется 20 раз, строится график типа боксплот, по оси x среднее фактическое возмущение данных в эксперименте.

Алгоритм метода

Отрезок интегрирования $[a, b]$, ОДУ $y' = f(x, y)$

1. Строится равномерная сетка n узлов (x_i) с шагом $h = \frac{b-a}{n-1}$
2. Начальное условие $y(a) = y_0$ соответствует x_0 по таблице
3. Далее строится сетка для y:
$$y_{i+1} = y_i + hf(x, y)$$
4. В случае использования правила Рунге, число узлов удваивается на каждой итерации (сначала n=2), пока значение максимальной разности $y_{2i+2}(\frac{h}{2}) - y_{i+1}(h)$ больше заданой точности ϵ, где $y(\frac{h}{2})$ - значения y на сетке, в которой в 2 раза больше узлов, чем в $y(h)$

Предварительный анализ задачи

ОДУ по варианту: $x^2y' + xy + 1 = 0$; a = 1, b = 3
Явное выражение:

$$y' = -\frac{1 - xy}{x^2} \tag{1}$$

Задача Коши:

$$y(a) = 1 \tag{2}$$

Точное решение:

$$xy = 1 - \ln(|x|) \tag{3}$$

Модульная структура программы и контрольные тесты

Модульная структура программы

```
double f(double x, double y);
```

- явная запись ОДУ по варианту, (1)

```
double* euler_method(double y0, double a,
    double b, double(*f)(double, double), int n);
```

- реализация метода Эйлера, y0 - начальное условие (3);a, b - отрезок интегрирования; n - число узлов в сетке

```
double* create_grid_even(int n, double a, double b);
```

- функция, возвращающая равномерное разбиение отрезка $[a, b]$ (сетка x_i) на n узлов

```
double* runge(int power, double y0, double a,
    double b, double(*f)(double, double),int *n);
```

- реализация правила Рунге для достижения заданой точности 10^{-power}, остальные аргументы - аргументы метода Эйлера.

```
double uglify_initial(double initial,
    int max_procent,int min_procent);
```

- функция, реализующая случайное изменение начального условия initial (3) в диапазоне [max_procent,min_procent]

Численный анализ решения

Иллюстрация работы метода

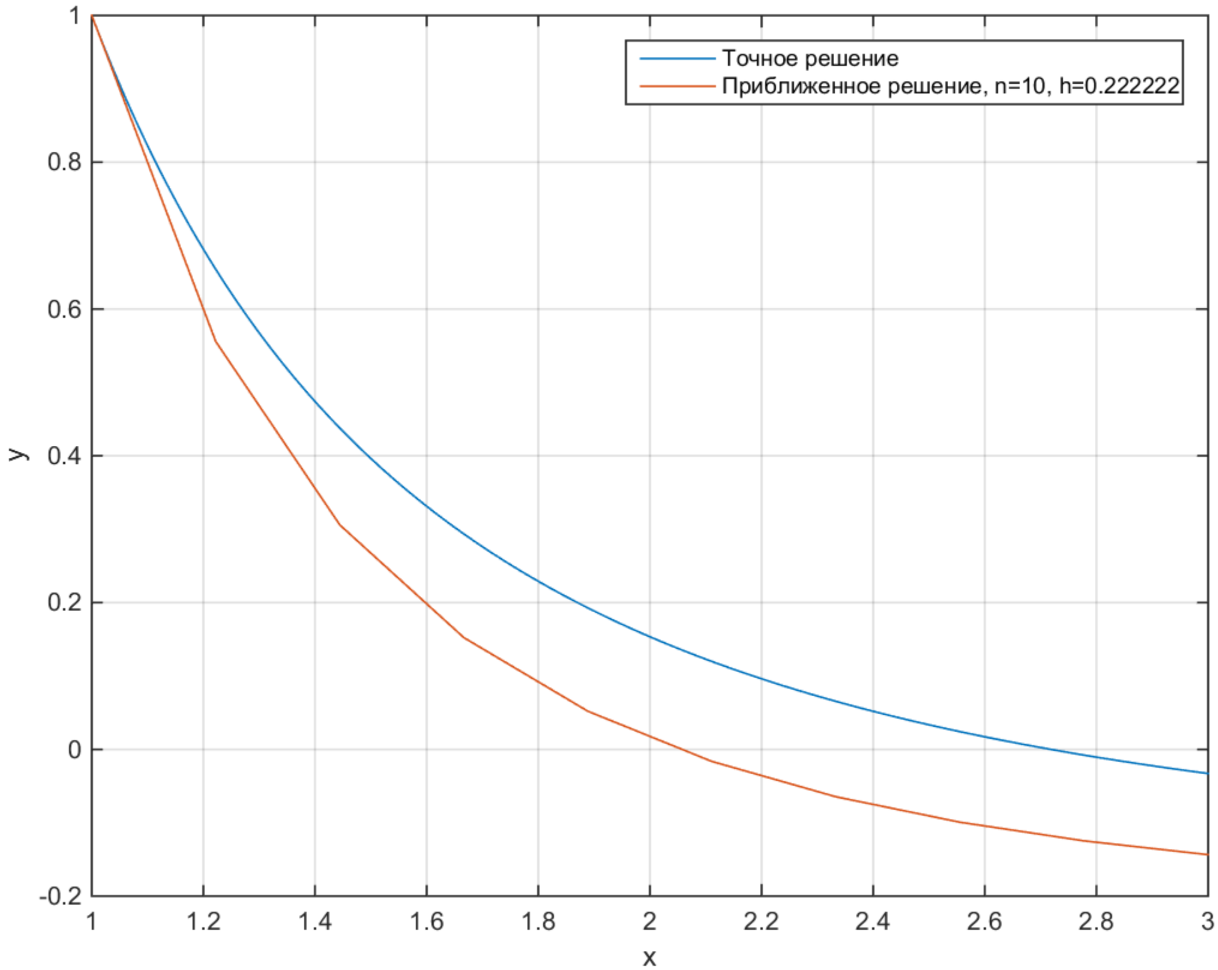

Рис. 1: Графики точного и приближенного решений (n=10)

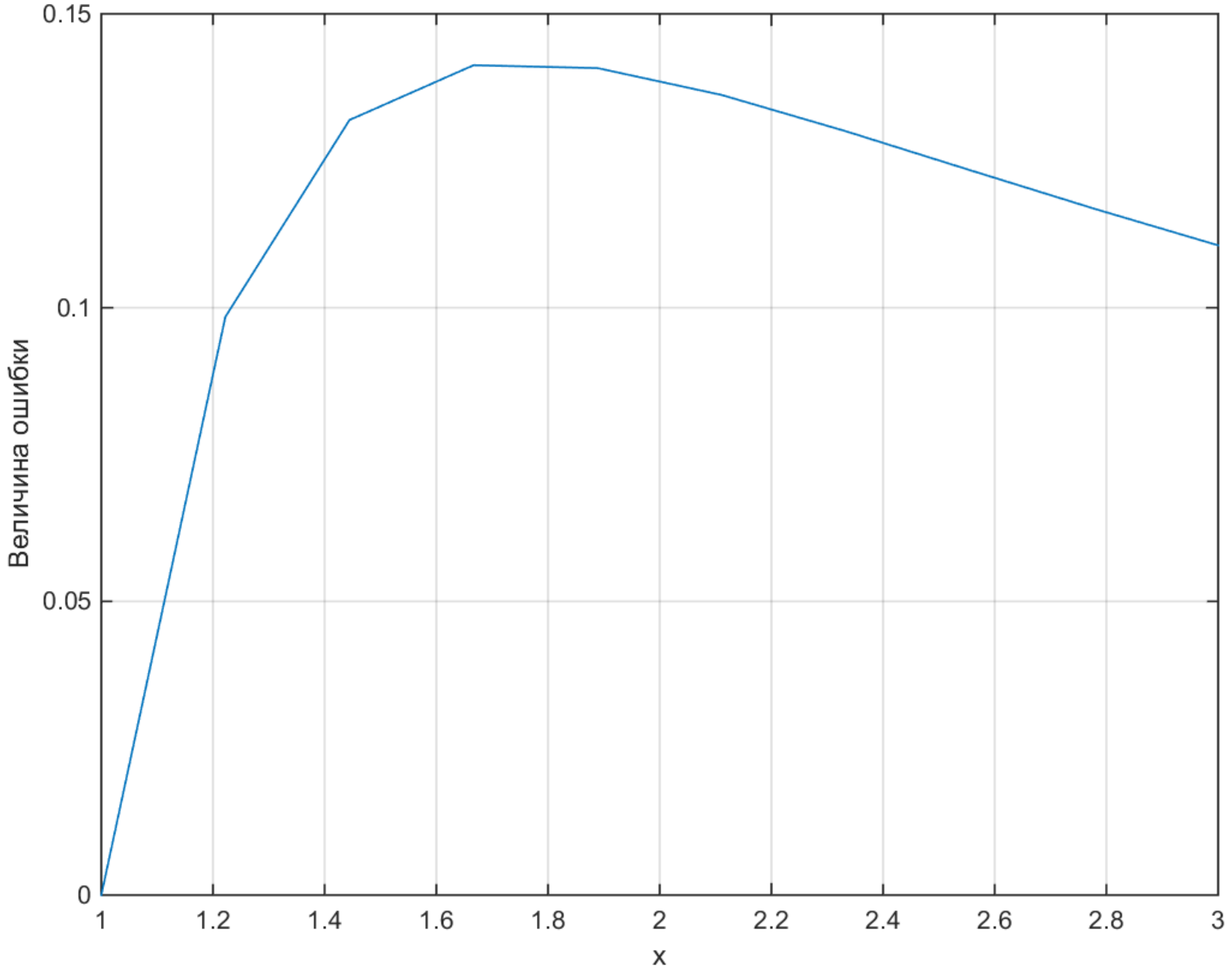

Рис. 2: График поточечной ошибки (n=10)

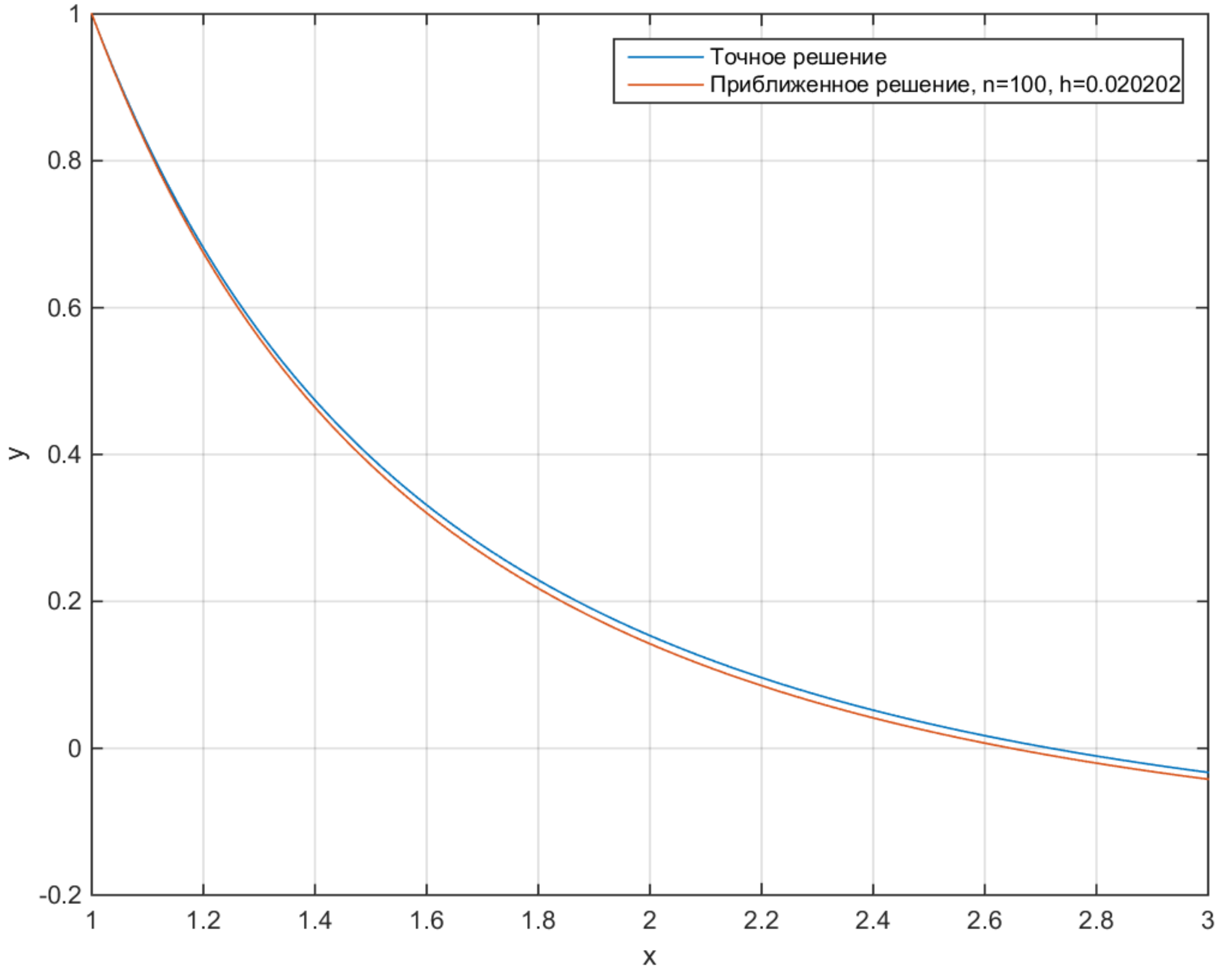

Рис. 3: Графики точного и приближенного решений (n=100)

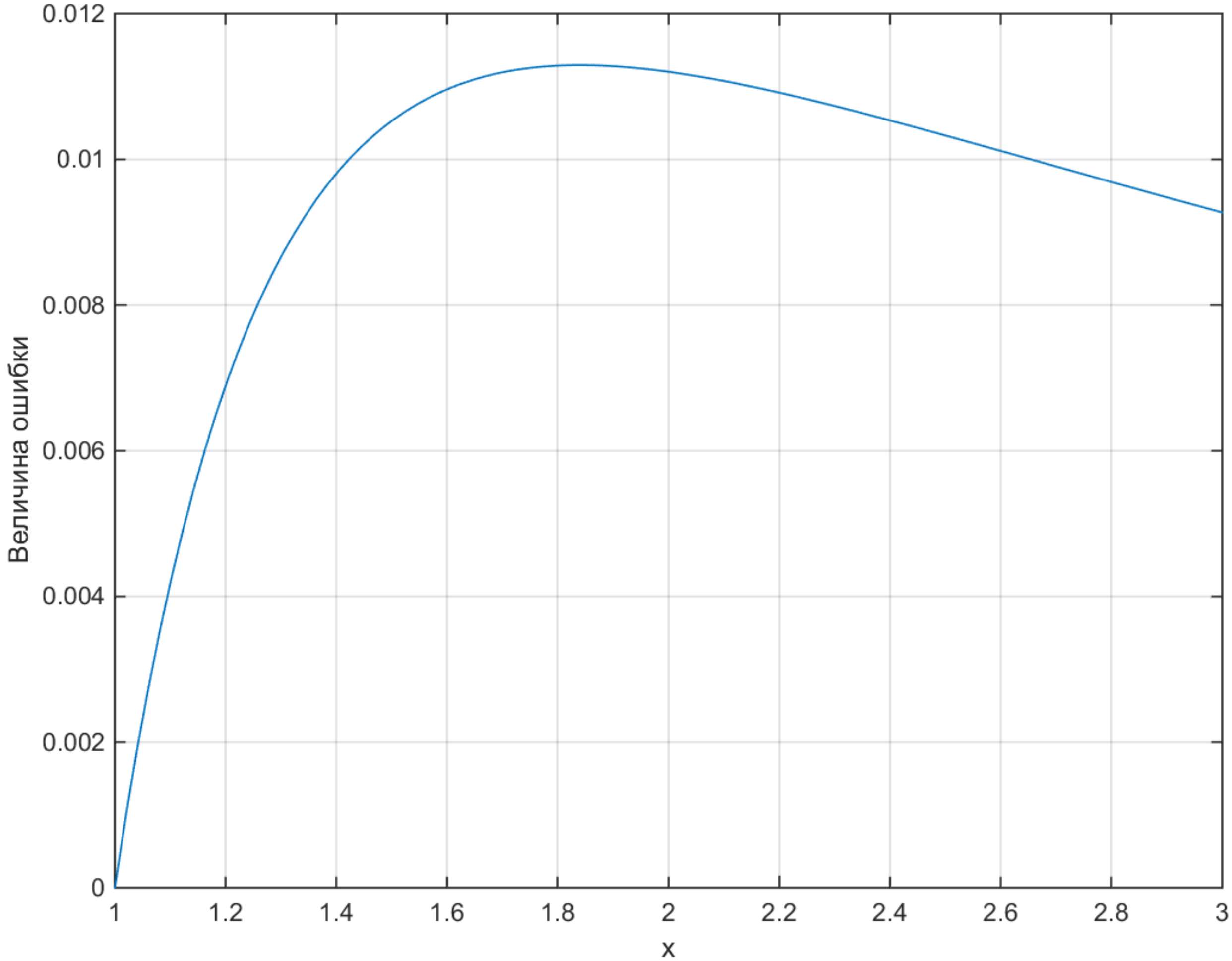

Рис. 4: График поточечной ошибки (n=100)

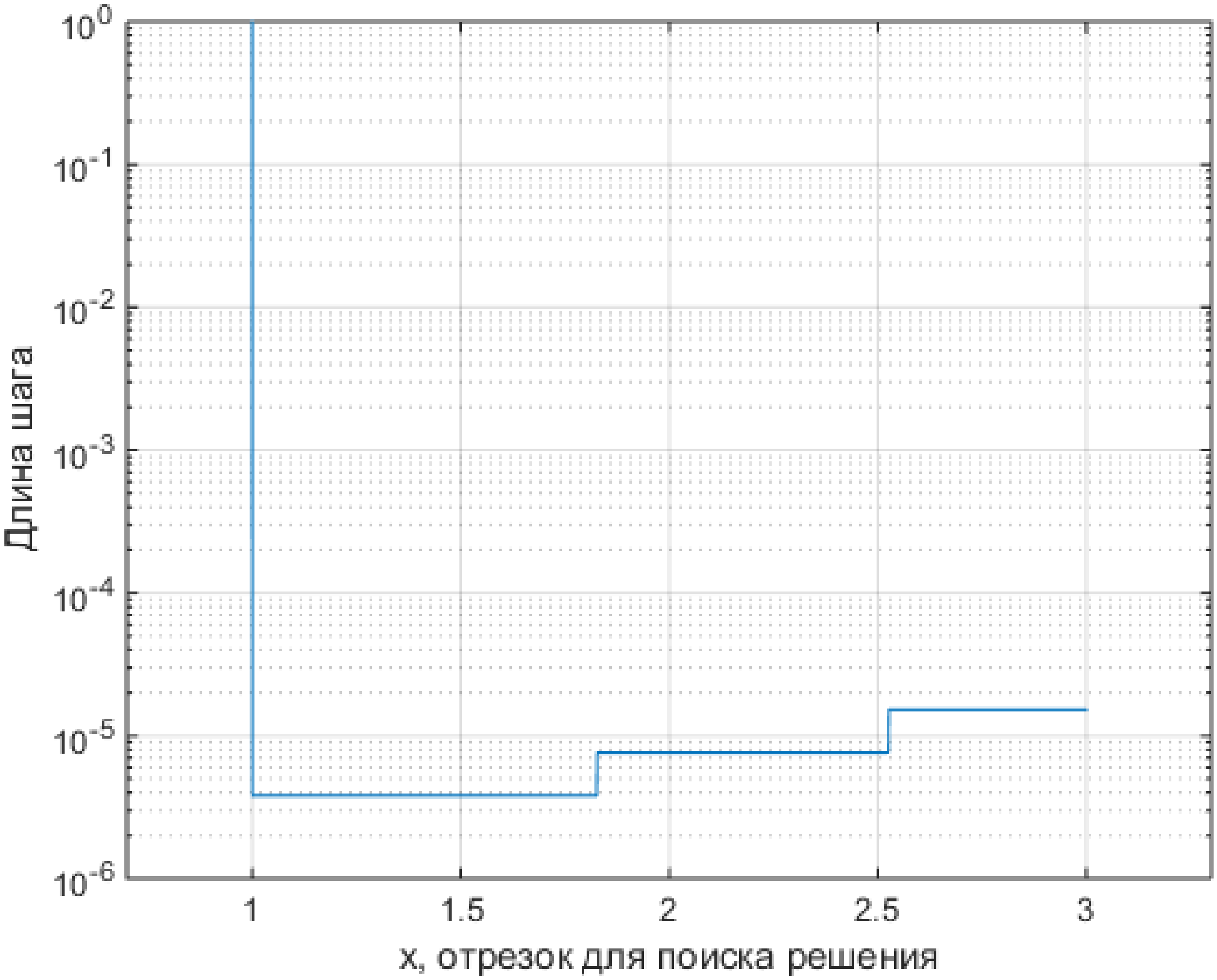

Рис. 5: График изменения шага по отрезку поиска решений при заданной точности 10^{-6}

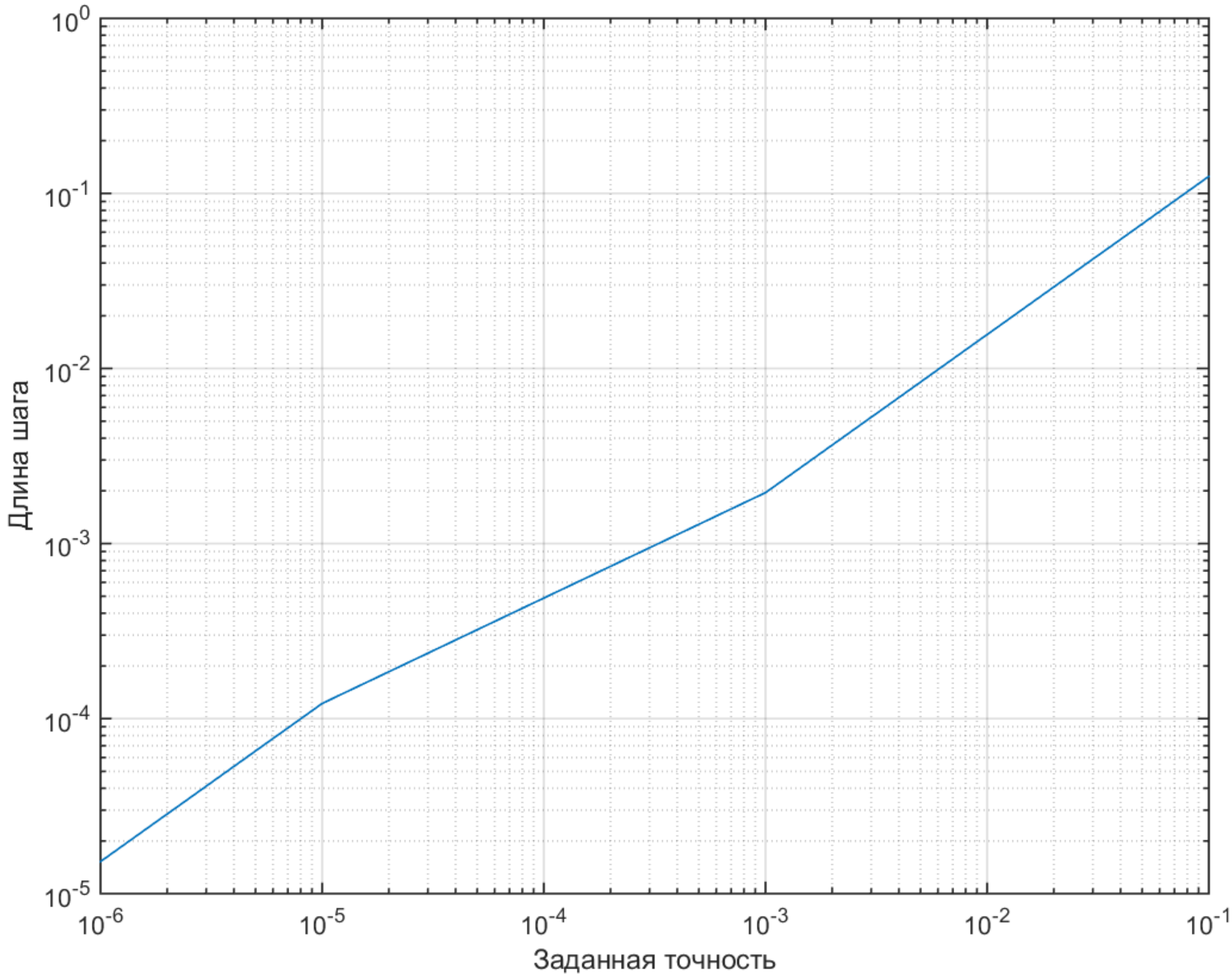

Рис. 6: График зависимости длины шага разбиения от заданой точности

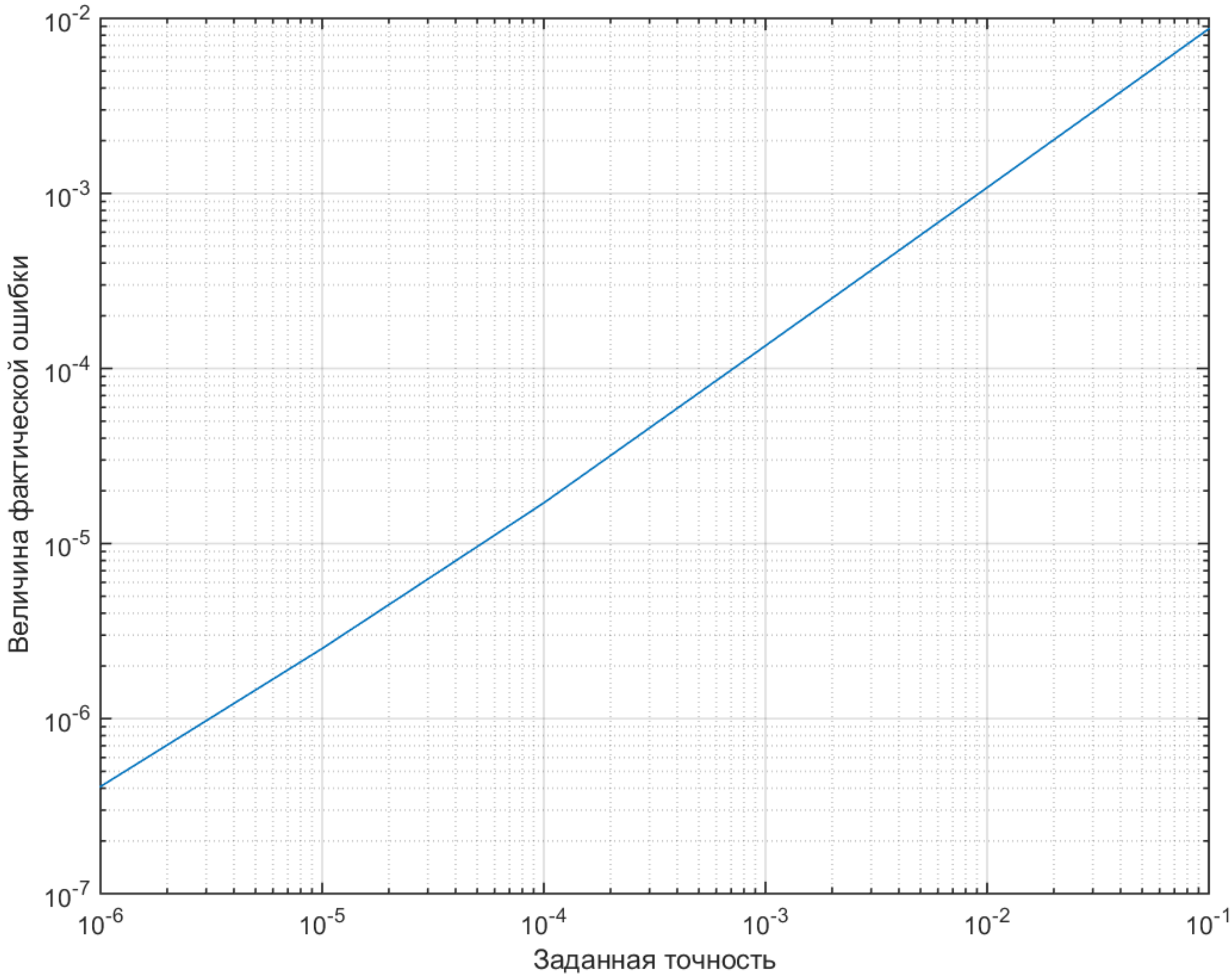

Рис. 7: График зависимости фактической ошибки от заданой точности

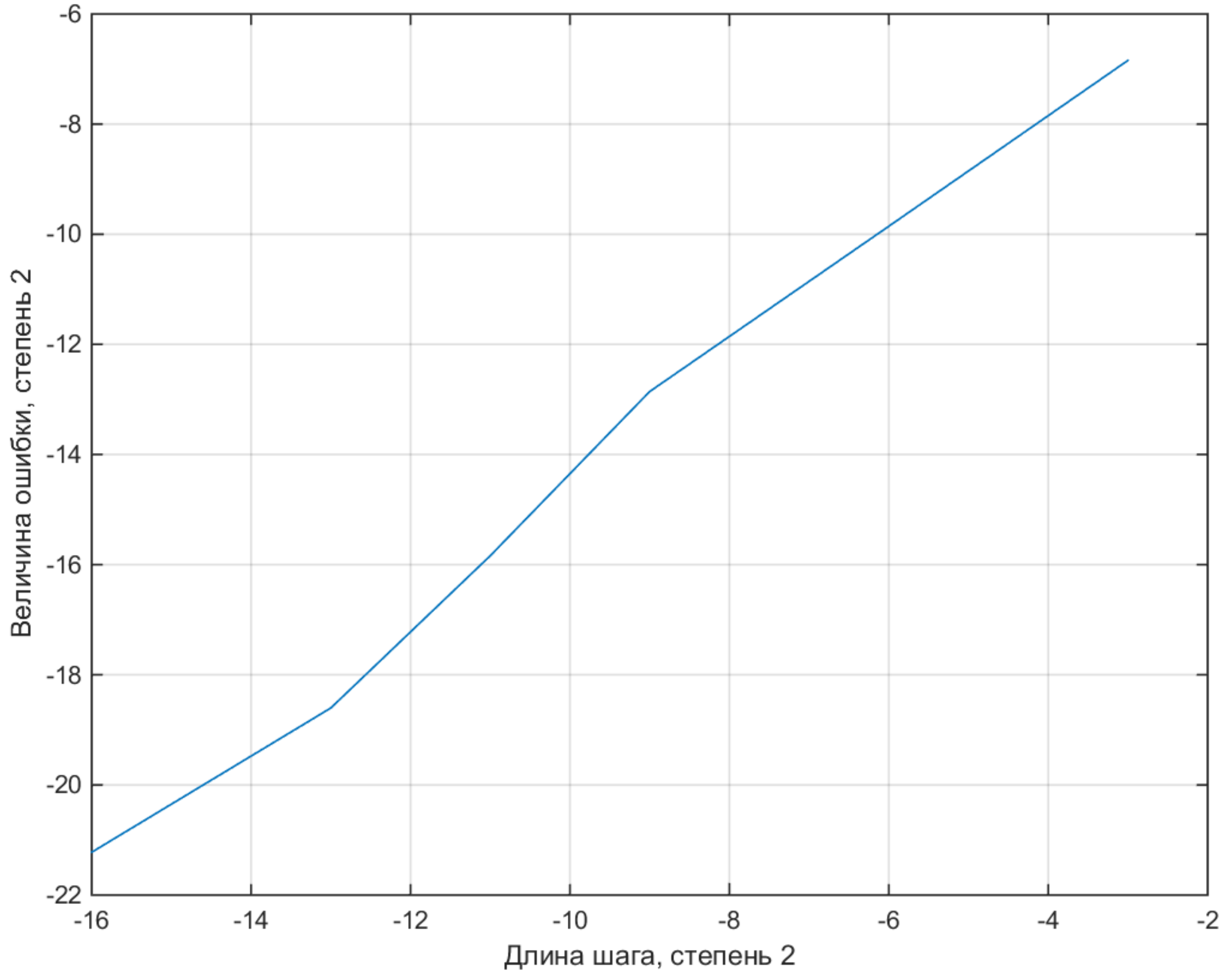

Рис. 8: Зависимость фактической ошибки от фиксированного шага интегрирования

Здесь порядок метода, как и ожидалось равен 1.1862

Дополнительное задание

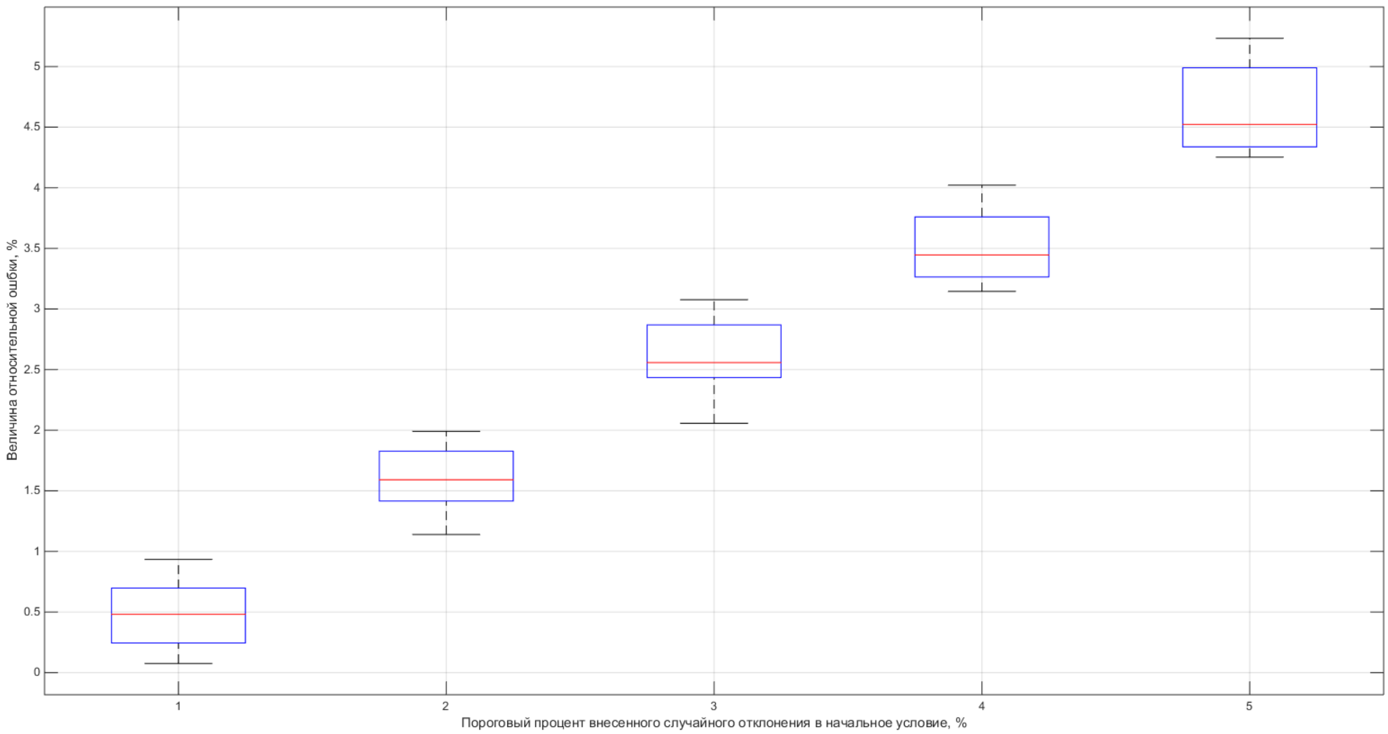

Рис. 9: График, показывающий зависимость изменения относительной погрешности в зависимости от внесенной в начальное условие погрешности

Выводы

1. Из рис. 2 и 4 видно, что с увеличением числа узлов в 10 раз погрешность метода уменьшается в 10 раз (максимальное значение).

2. Из рис. 7 видно, что фактическая ошибка почти (константа) такая же, как и заданная точность.

3. Из рис. 8: погрешность решения прямо пропорцианальна длине шага разбиения (коэффициент равен 1.1862).

4. Из рис. 9 видно, что с увеличением неточности в начальном условии задачи на k% ожидается в среднем k% относительной ошибки.