

Санкт-Петербургский Политехнический Университет
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Отчет по лабораторной работе № 8
"Интерполяционные полиномы приближения табличных
функций"
дисциплина "Численные методы"

Выполнил студент гр. 5030102/20003
Преподаватель

Ляпустин Е.О.
Козлов К.Н.

Март, 2024

Формулировка задачи и ее формализация

Приближение табличной функции полиномом Ньютона (вперед)

Формализация задачи:

Реализовать метод построения полинома Ньютона, проанализировать его работу

Поставленные задачи:

1. Реализовать алгоритм метода
2. Для малого числа узлов (3) вычислить в ручную на бумаге значения полинома по заданию и фактической ошибки в узлах и серединах между узлами. Получить полином в каноническом виде (по степеням x).
3. Построить на одном графике функцию, полином для 3 вариантов небольшого числа узлов (5...10), отметить узлы. На другом графике построить функции поточечной ошибки для этих же полиномов. Провести линию теоретической ошибки, построенной для одного из $3x$ полиномов.
4. Зависимость ошибки интерполяции от степени интерполяционного полинома (количества узлов). Требуется построить график максимальной ошибки на отрезке в зависимости от числа узлов: 5...100.
5. Две точки требуется выбрать из проверочной сетки, в них вычисляется модуль разности значений функции и полинома для полиномов, построенных по разному количеству узлов

Также, вариант подразумевает выполнение следующего доп. задания:

Зависимость ошибки интерполяционного полинома при возмущении данных. В значение функции в точках сетки для построения полинома вносятся возмущения максимальной величины 1%, 2%, 3%, 4%, 5%. Возмущения вносятся в каждую точку случайно. Требуется вычислить относительную ошибку по всему отрезку для каждого значения максимального возмущения и построить график.

Алгоритм метода и условия применимости

В цикле по m от 0 до n - числа узлов вычисляется коэффициент - разделенная разность $[y_0, \dots, y_m]$. Далее, этот коэффициент умножается на $\prod_{k=0}^m (x - x_k)$, где x_k - k -й элемент сетки x_h , а x - значение аргумента, в котором вычисляется значение полинома Ньютона.

Предварительный анализ задачи

Вариант включает в себя аппроксимацию полиномом Ньютона двух следующих функций:

$$x^2 - \sqrt{\log_{10}(x+3)} \quad (1)$$

$$x^3 - 0.2x^2 + 0.4|x| + 1.4 \quad (2)$$

Для интерполирования функции (1) выбран отрезок $[-2; 4]$. Для функции (2) - $[0; 5]$ (выбор интервалов непрерывности)

Ручной расчет, $n=3$

1. а) $f = x^2 - \sqrt{\lg(x+3)}$. Равномерная сетка

Сетка: $x_h = [-2; 1; 4]$

$y_h = [4; 0,22; 15,08]$

Таблица разгел. разн:

x_h	y_h	$[y_i, y_{i+1}]$	$[y_i, y_{i+1}, y_{i+2}]$
-2	4	-1,26	1,04
1	0,22	4,95	
4	15,08		

Полном:

$$P(x) = y_0 + [y_0, y_1] \cdot (x - x_0) + [y_0, y_1, y_2] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)$$

$$= 4 - 1,26(x+2) + 1,04(x+2)(x-1) =$$

$$= 1,04x^2 - 0,22x - 0,6$$

Формулы ошибок

$$|f(x_0) - P(x_0)| = 0$$

$$|f(x_2) - P(x_2)| = 0$$

$$|f(\frac{x_0+x_1}{2}) - P(\frac{x_0+x_1}{2})| = 0,07$$

$$|f(x_1) - P(x_1)| = 0$$

$$|f(\frac{x_1+x_2}{2}) - P(\frac{x_1+x_2}{2})| = 0,04$$

Модульная структура программы и контрольные тесты

Контрольные тесты

Для каждой функции строится 2 вида сетки - равномерная и Чебышевская. Далее, для определенного числа узлов n вычисляются значения полинома в 10000 точках (построение проверочной сетки).

Модульная структура программы

```
double** generate_ugrid(double (*f)(double), int n,  
double a, double b);
```

- построение равномерной сетки для переданной функции f , числа узлов n на отрезке $[a; b]$. Возвращает двумерный массив: в каждом подмассиве 2 элемента, на первой позиции - значение координаты x , на второй - y .

```
double** generate_chebgrid(double (*f)(double), int n,  
double a, double b);
```

- аналогично, построение сетки Чебышева

```
long double poly_newton(long double x, double* xh,  
double* yh, int n, double** sep_dif);
```

- функция, возвращающая значение полинома Ньютона в точке x . xh - набор элементов x табличной функции, yh - набор элементов y табличной функции, n - число узлов (число элементов в массивах xh и yh), sep_dif - набор (таблица) вычисленных разделенных разностей для сетки xh и yh .

```
double f_smooth(double x);  
double f_gap(double x);
```

- данные по варианту математические функции.

```
double** sep_difference(double* xh, double* yh, int n);
```

- функция, возвращающая таблицу (двумерный массив), содержащую на (i,j) позиции разделенную разность $[y_i, \dots, y_j]$.

```
double** grid_change(double** h, int n, double max_decline);
```

- функция, возвращающая измененную на величину, меньшую $max_decline\%$ (случайно) сетку.

Численный анализ решения

Функции и полиномы на одном графике. Графики поточечной ошибки

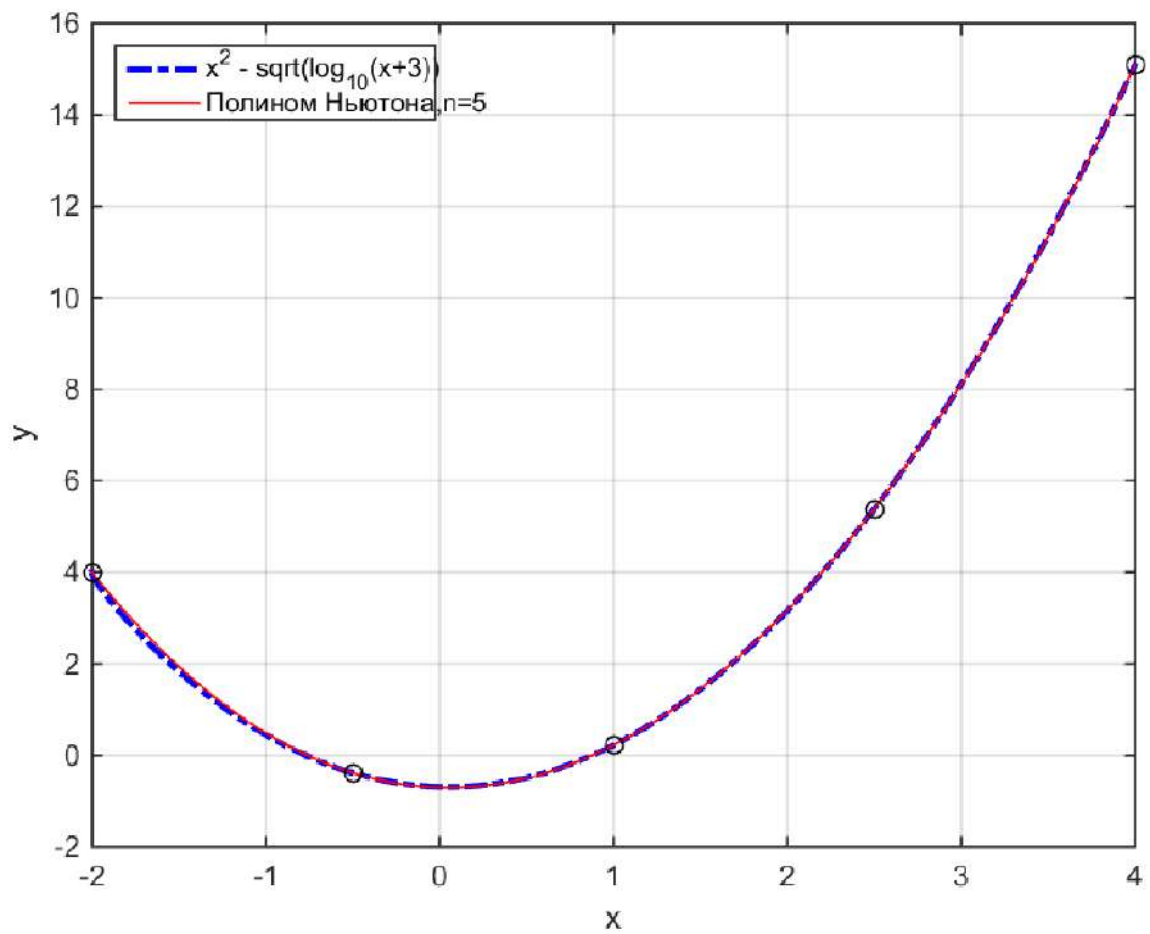


Рис. 1: График функции (1) и полинома Ньютона для $n=5$, равномерная сетка

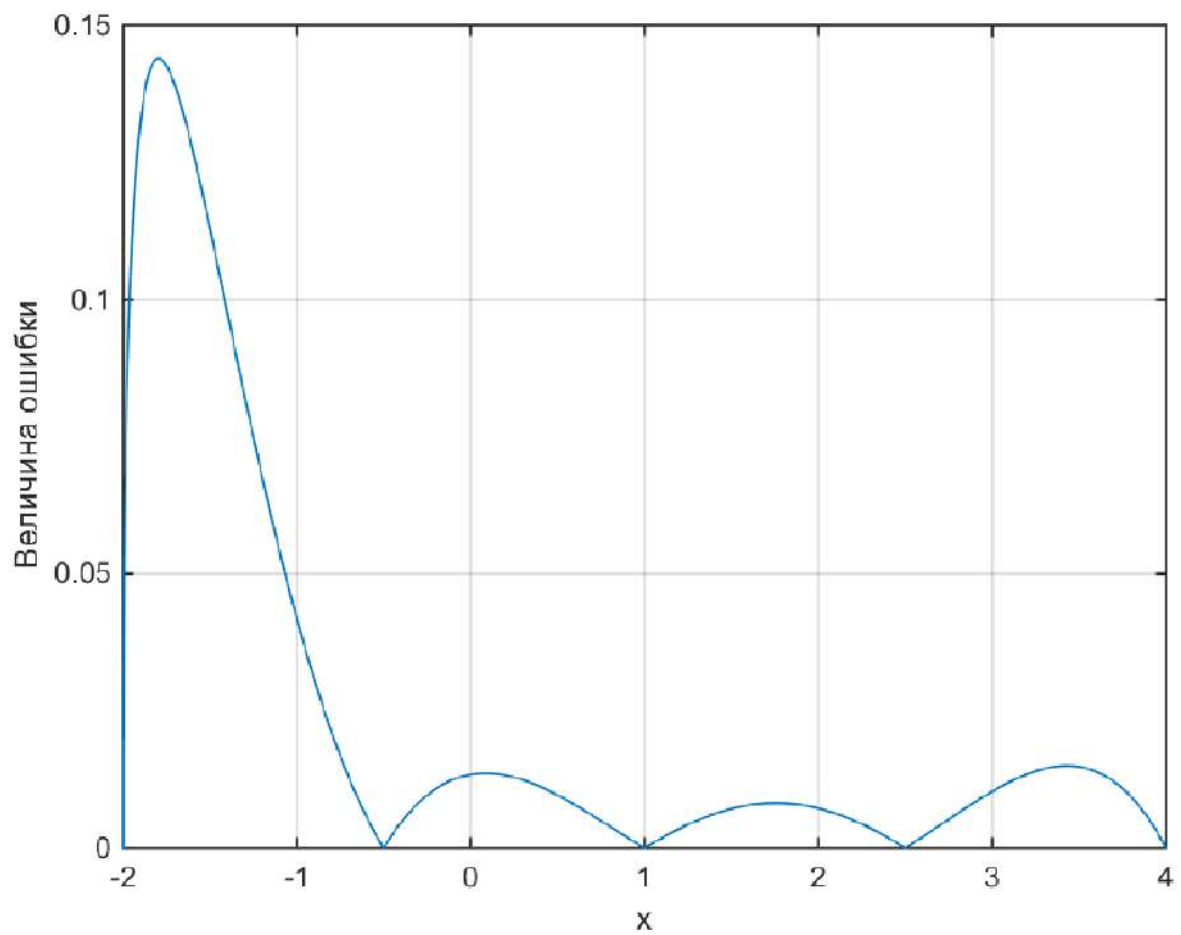


Рис. 2: График функции поточечной ошибки для $p=5$, равномерная сетка, функция (2)

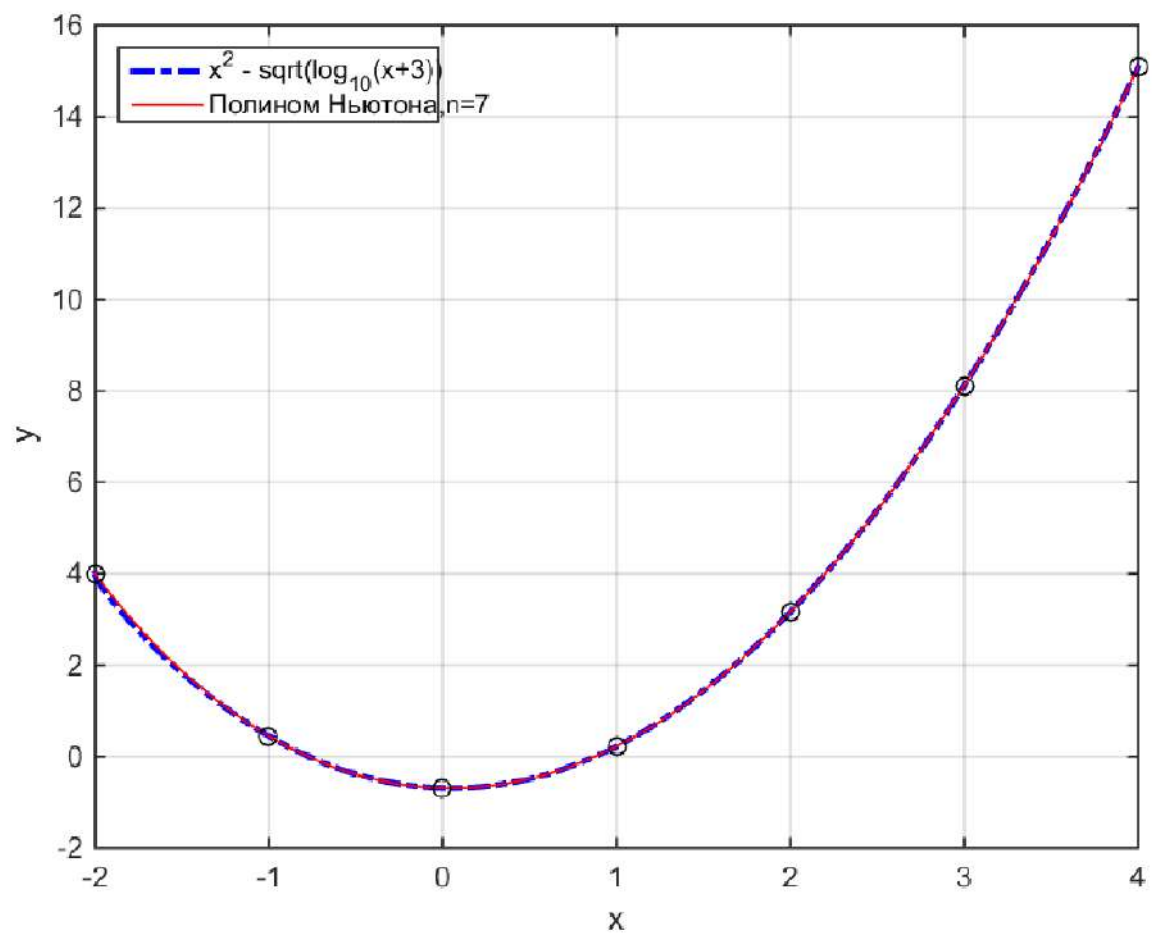


Рис. 3: График функции (1) и полинома Ньютона для $n=7$, равномерная сетка

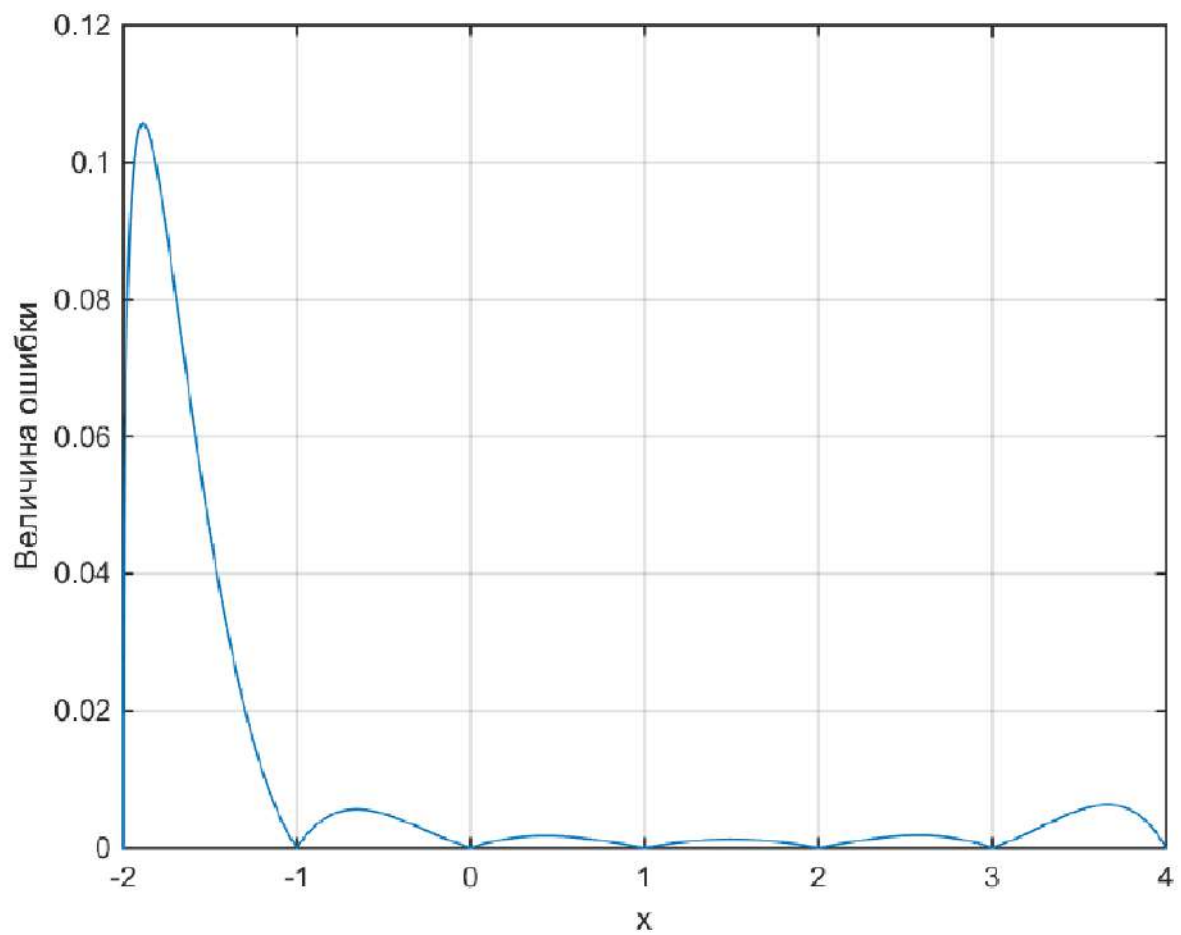


Рис. 4: График функции поточечной ошибки для $n=7$, равномерная сетка, функция (1)

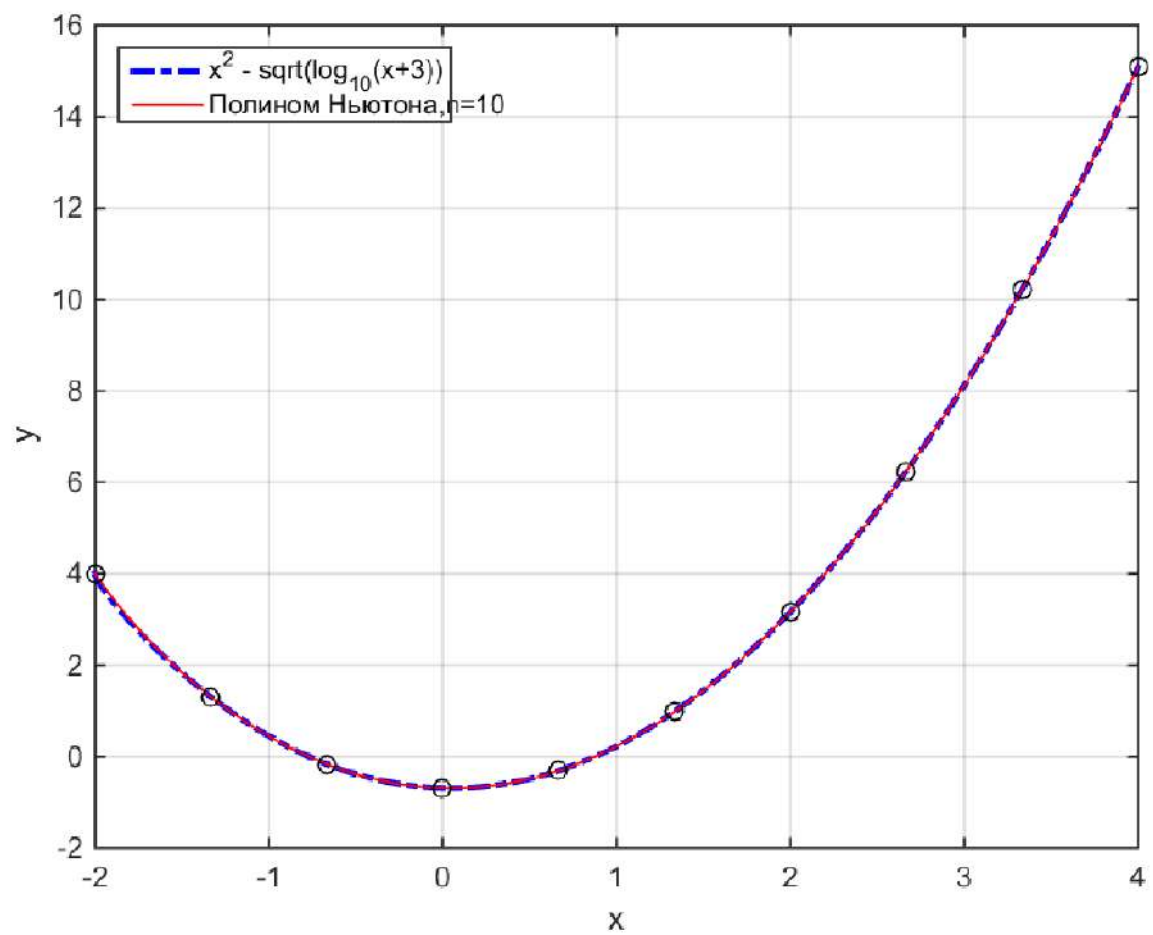


Рис. 5: График функции (1) и полинома Ньютона для $n=10$, равномерная сетка

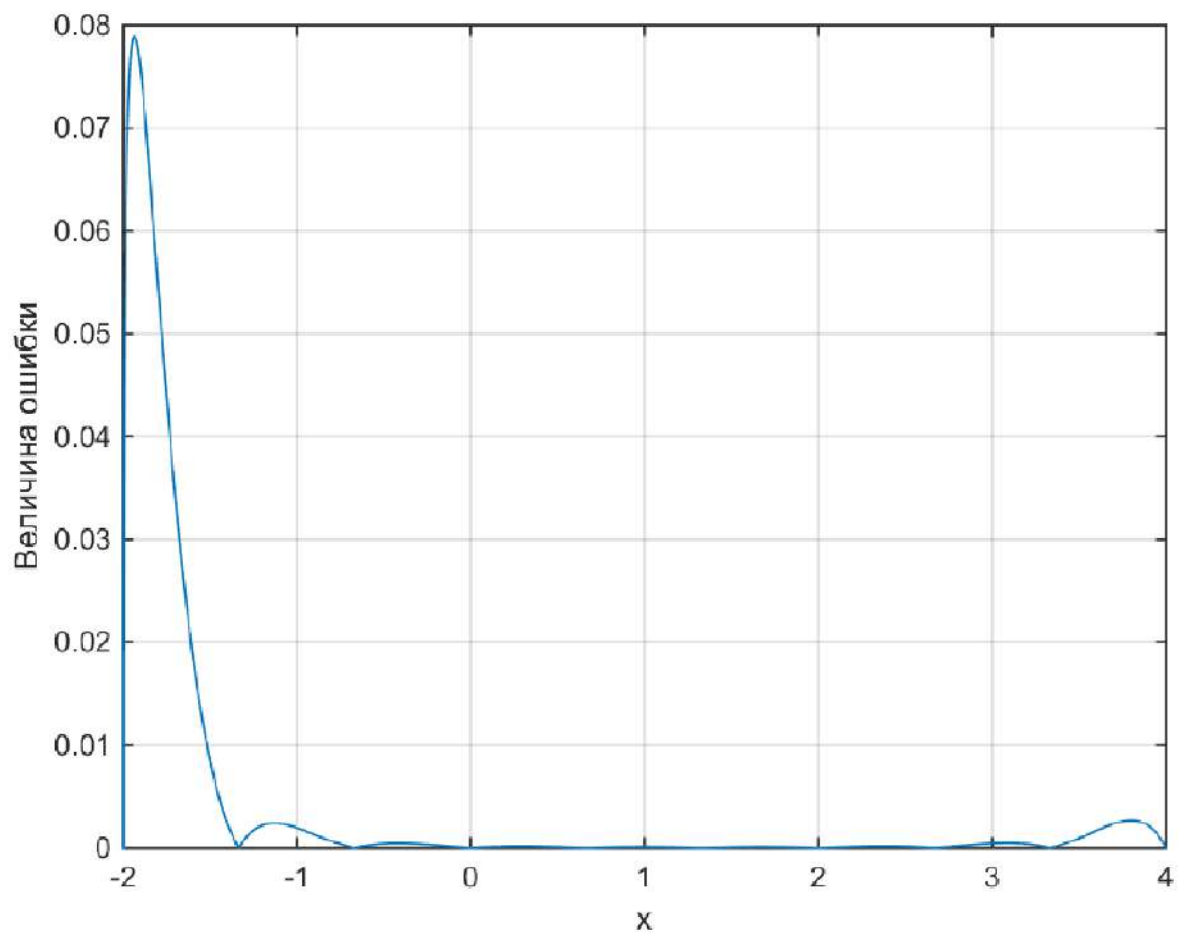


Рис. 6: График функции поточечной ошибки для $n=10$, равномерная сетка, функция (1)

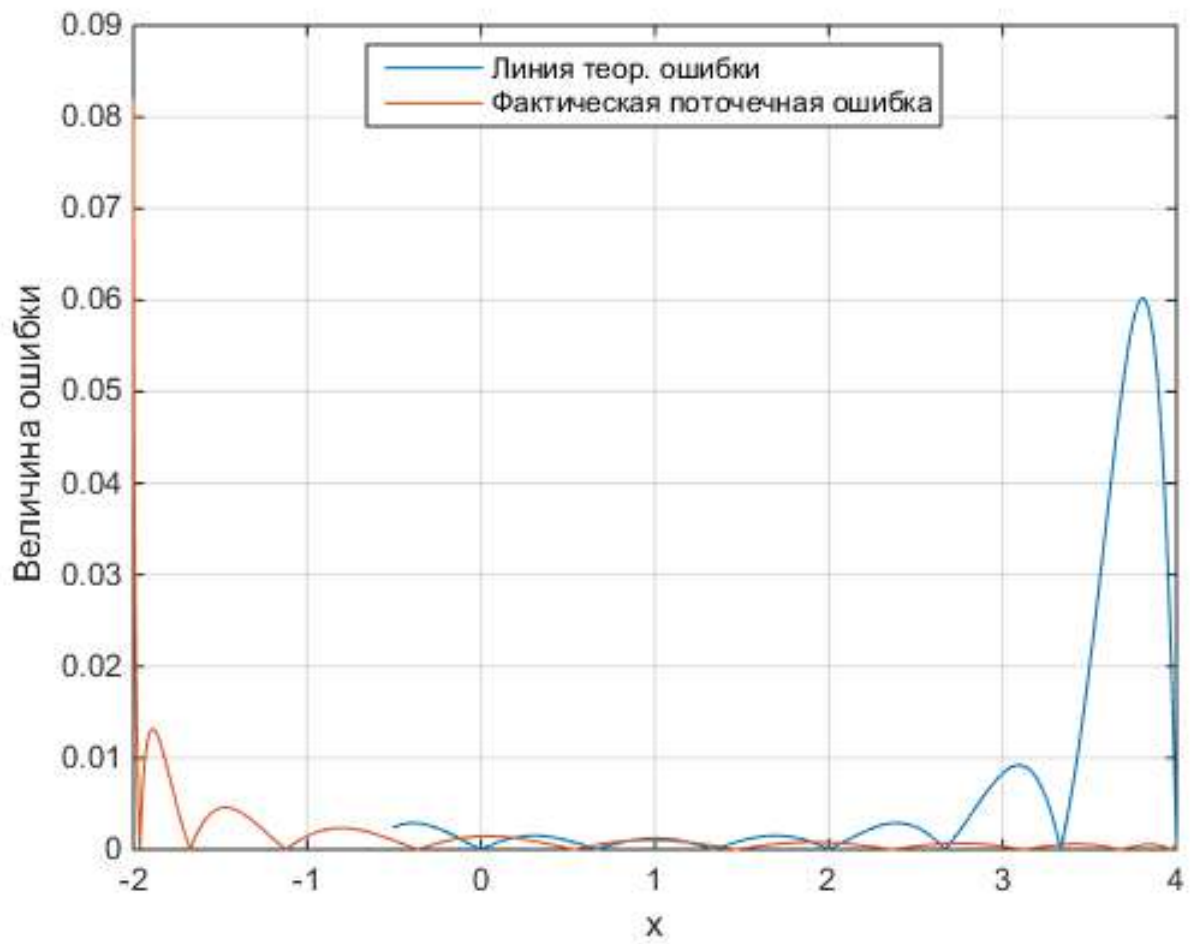


Рис. 7: График функции поточечной ошибки и линия теор. ошибки для $n=10$, равномерная сетка, функция (1)

В точке -2 и в ее правой окрестности производная функции (1) уходит на $+\infty$, поэтому теор. ошибка рассматривается с -0.5. Видно, что фактическая ошибка меньше теоретической.

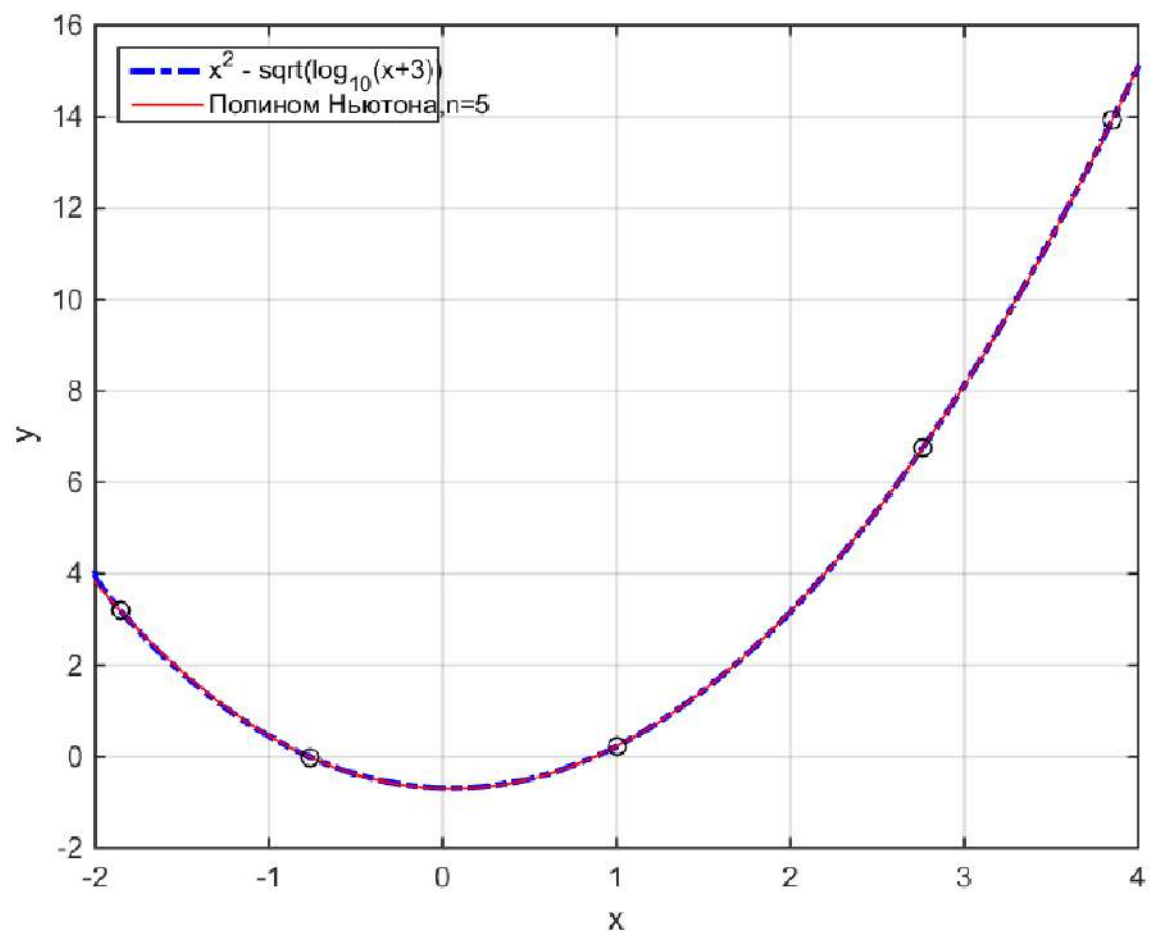


Рис. 8: График функции (1) и полинома Ньютона для $n=5$, сетка Чебышева

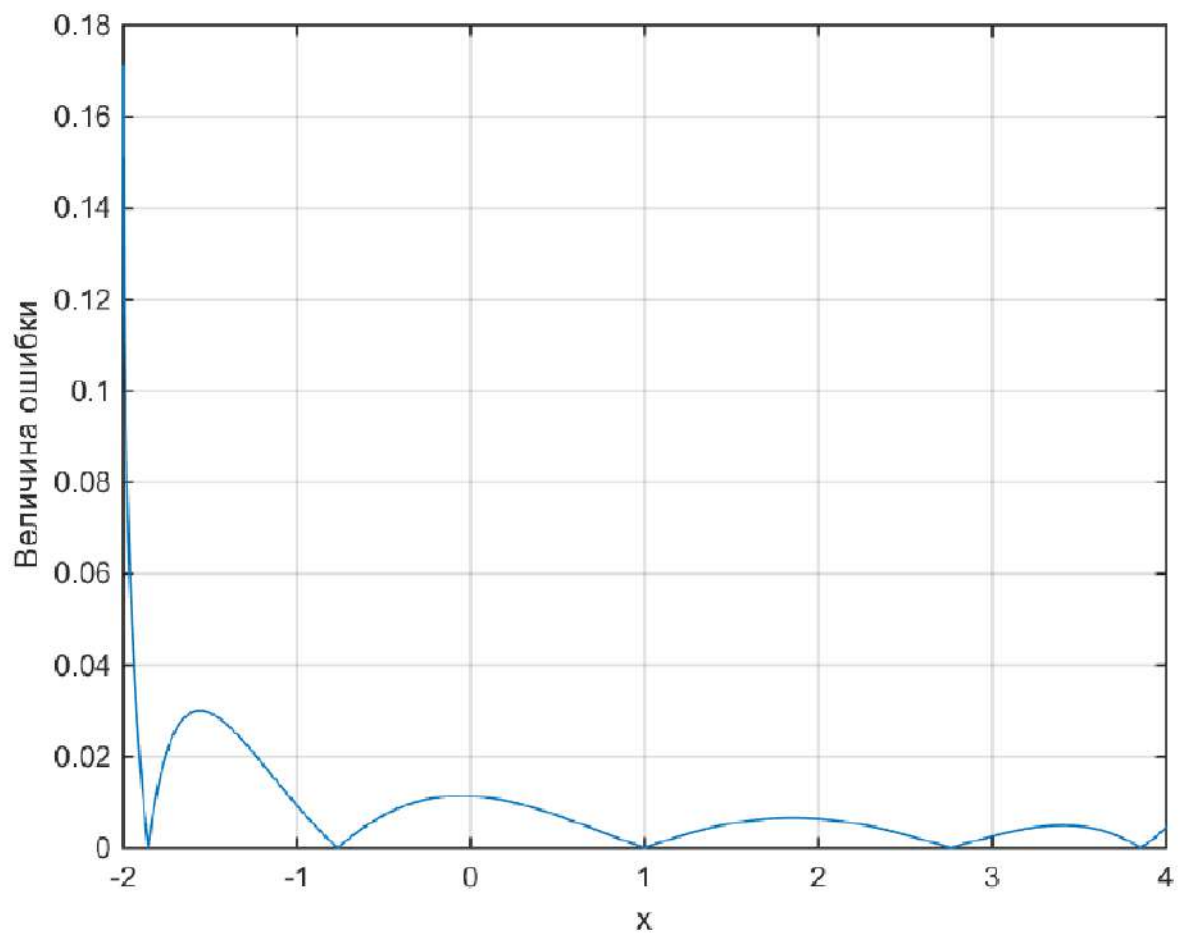


Рис. 9: График функции поточечной ошибки для $n=5$, сетка Чебышева, функция (1)

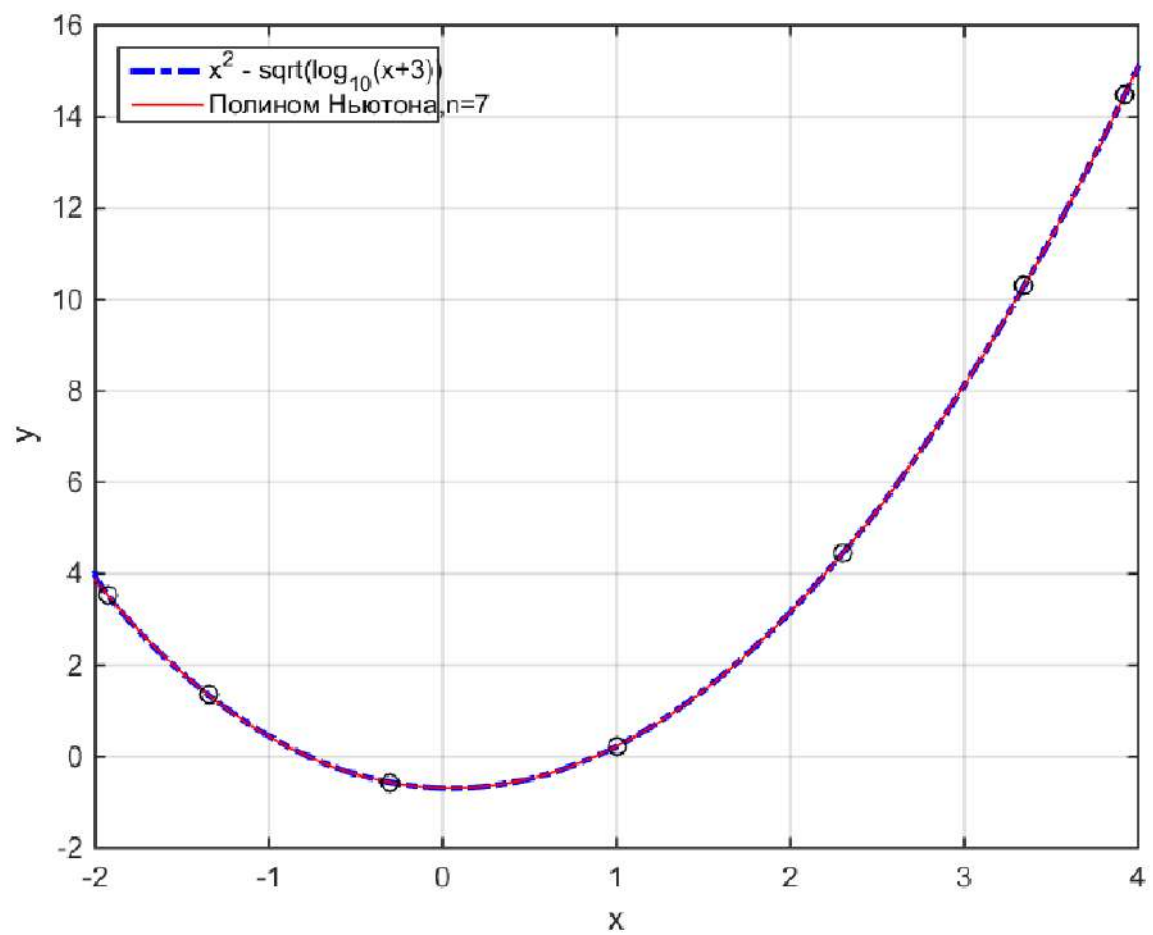


Рис. 10: График функции (1) и полинома Ньютона для $n=7$, сетка Чебышева

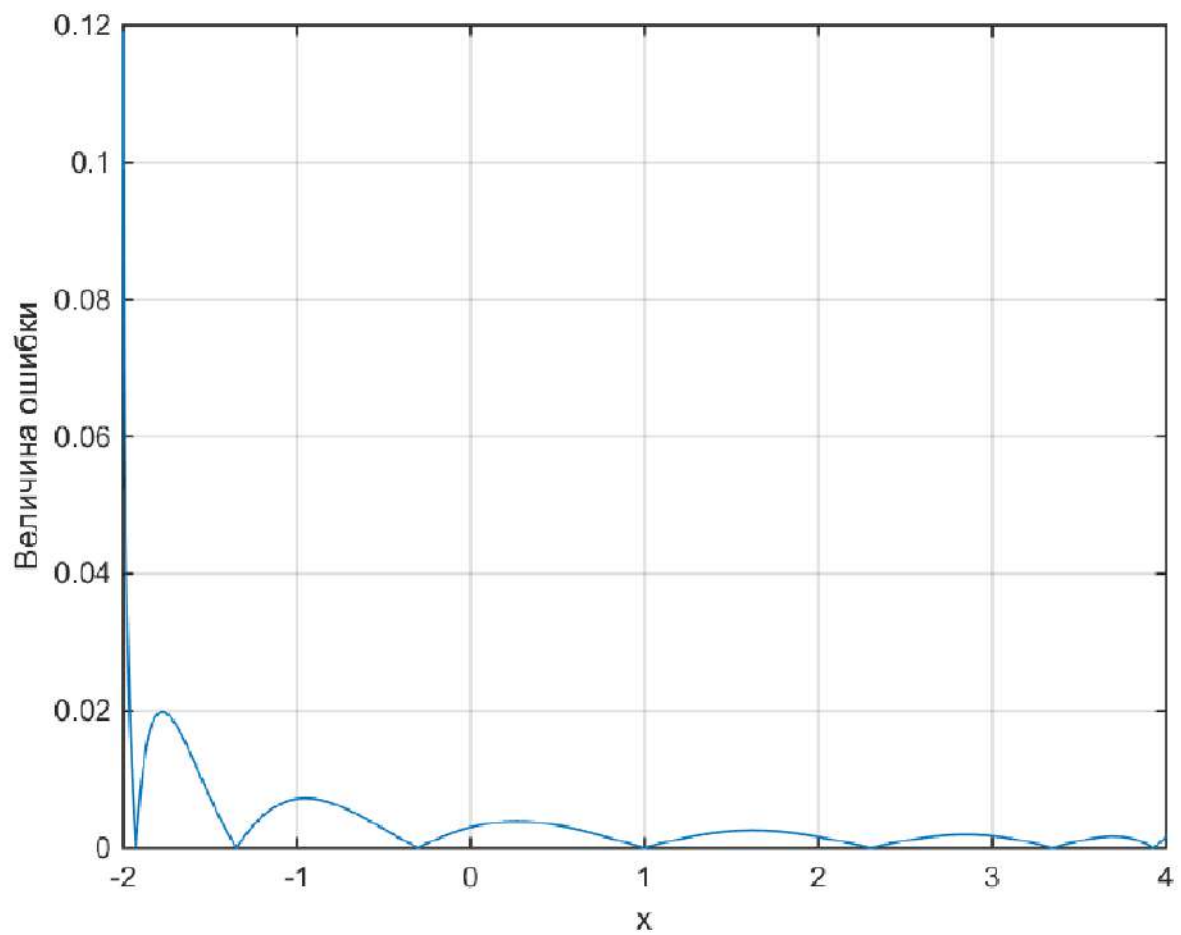


Рис. 11: График функции поточечной ошибки для $n=7$, сетка Чебышева, функция (1)

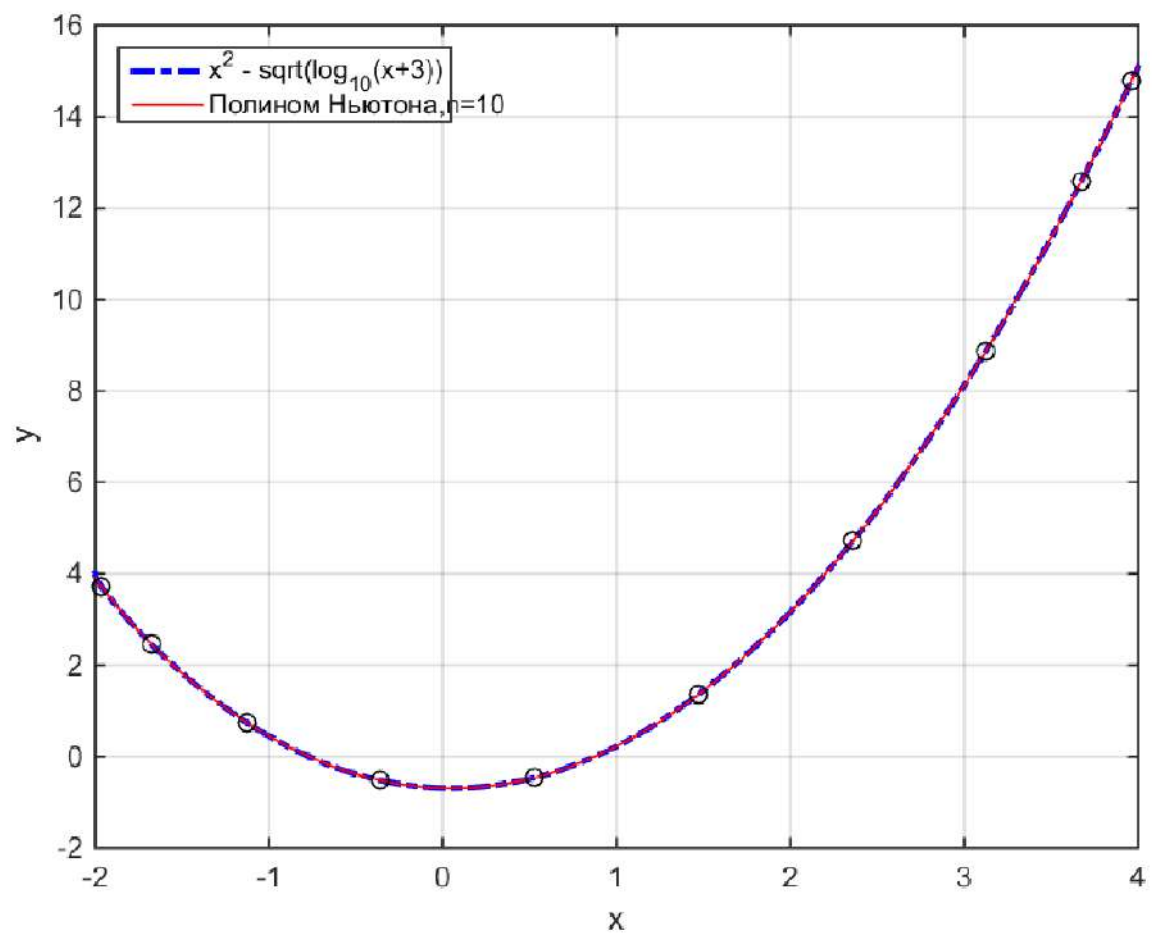


Рис. 12: График функции (1) и полинома Ньютона для $n=10$, сетка Чебышева

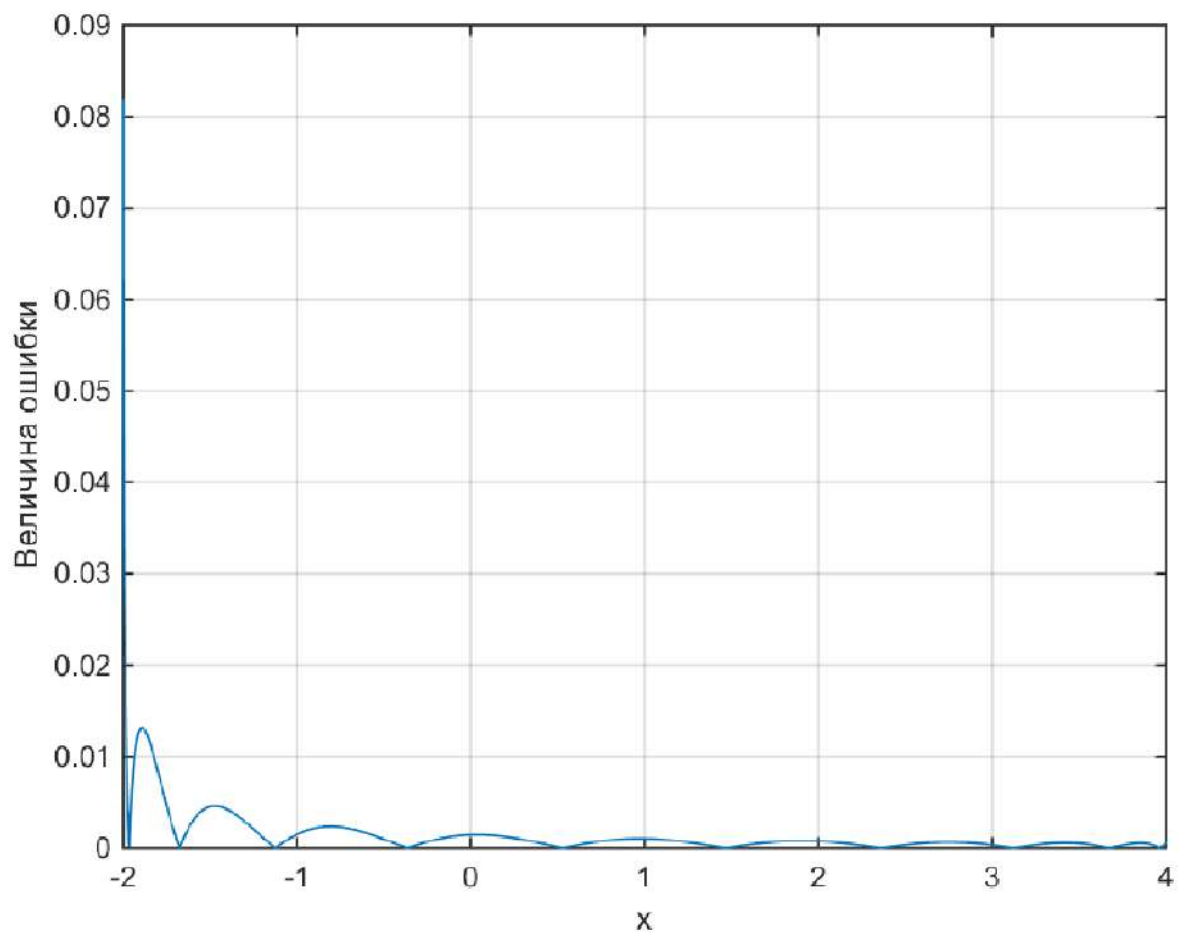


Рис. 13: График функции поточечной ошибки для $n=10$, сетка Чебышева, функция (1)

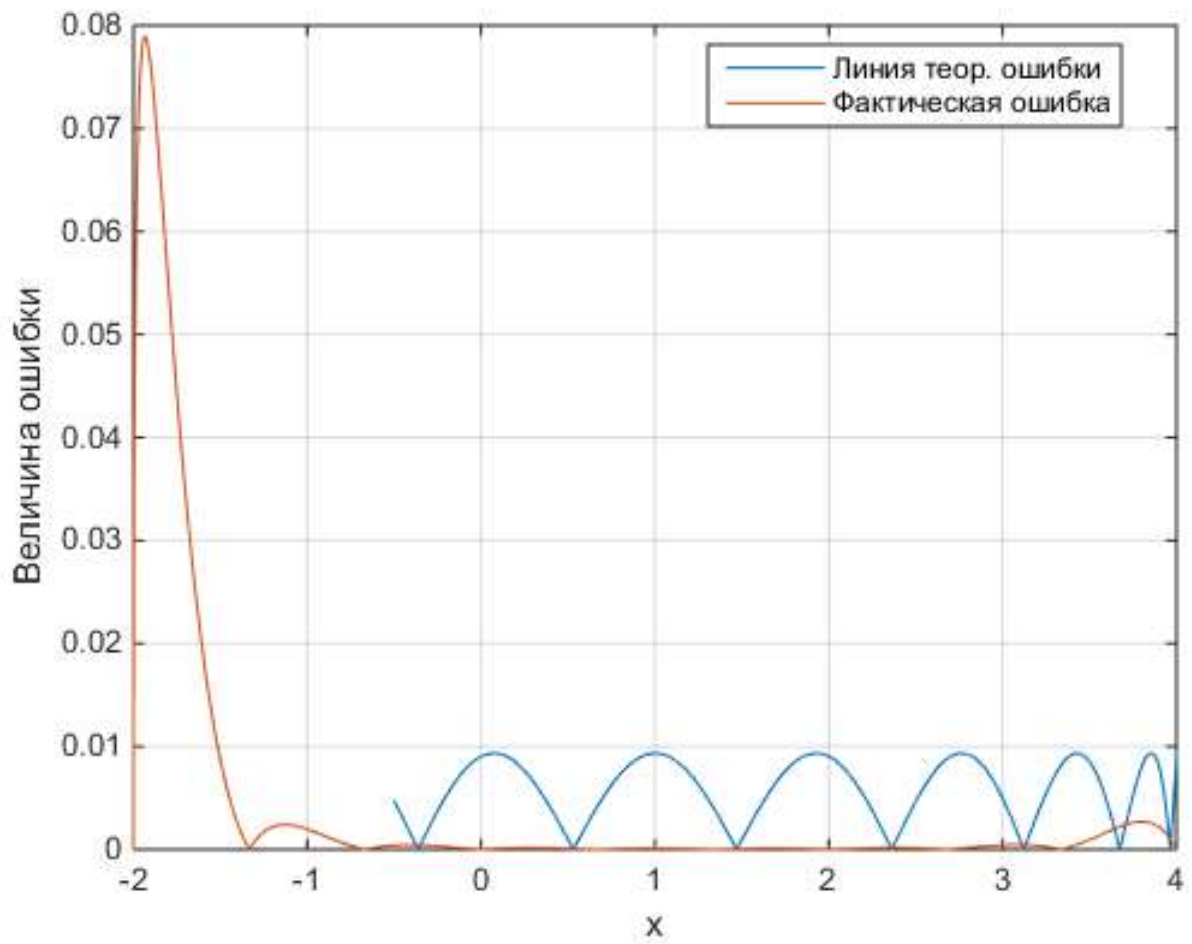


Рис. 14: График функции поточечной ошибки и линия теор. ошибки для $n=10$, сетка Чебышева, функция (1)

В точке -2 и в ее правой окрестности производная функции (1) уходит на $+\infty$, поэтому теор. ошибка рассматривается с -0.5. Видно, что фактическая ошибка меньше теоретической.

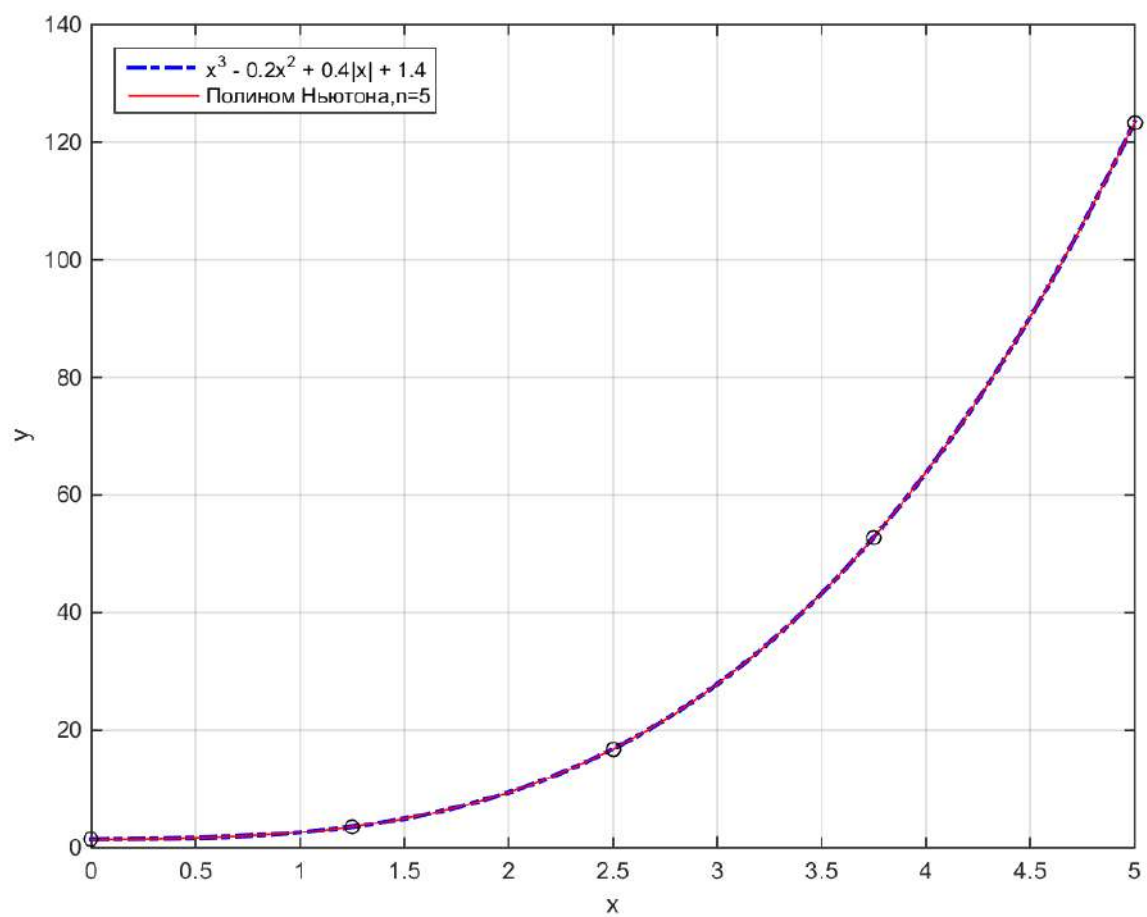


Рис. 15: График функции (2) и полинома Ньютона для $n=5$, равномерная сетка

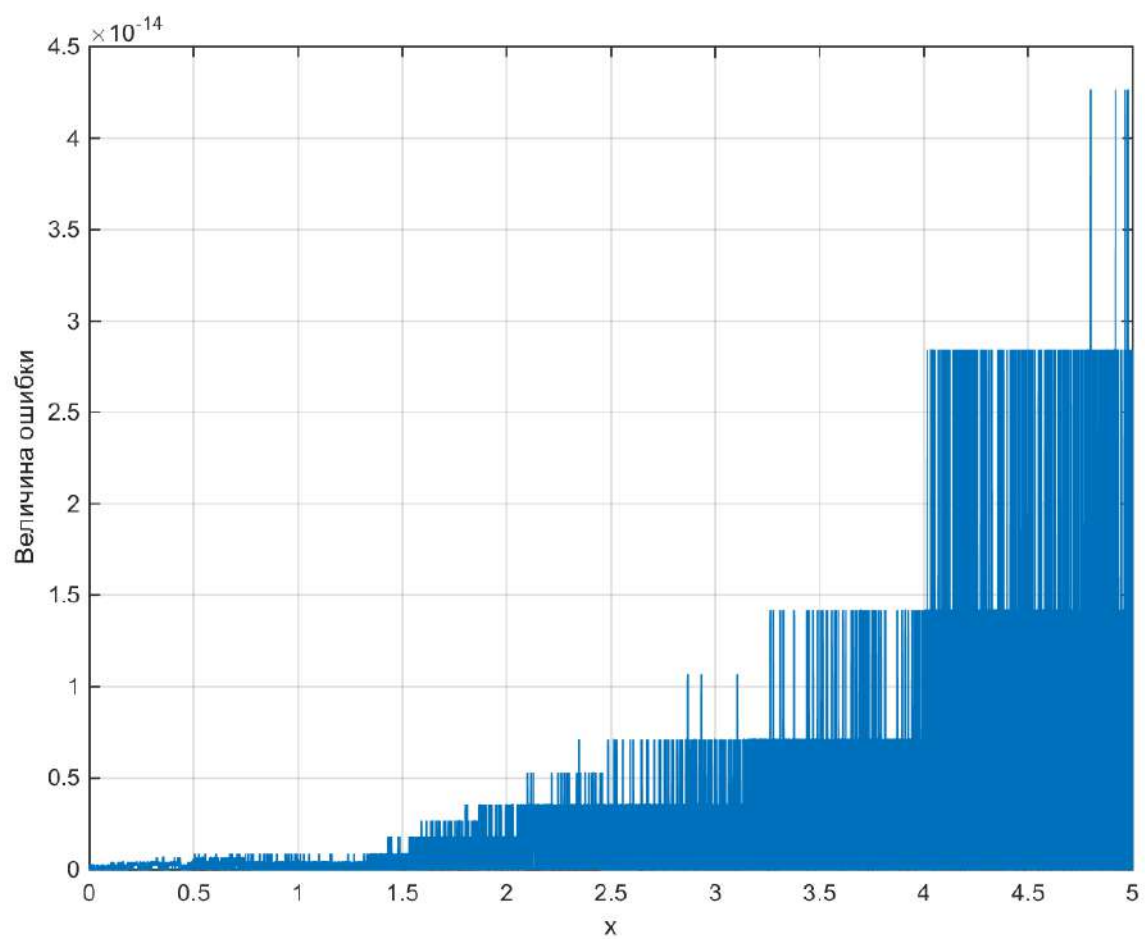


Рис. 16: График функции поточечной ошибки для $n=5$, равномерная сетка, функция (2)

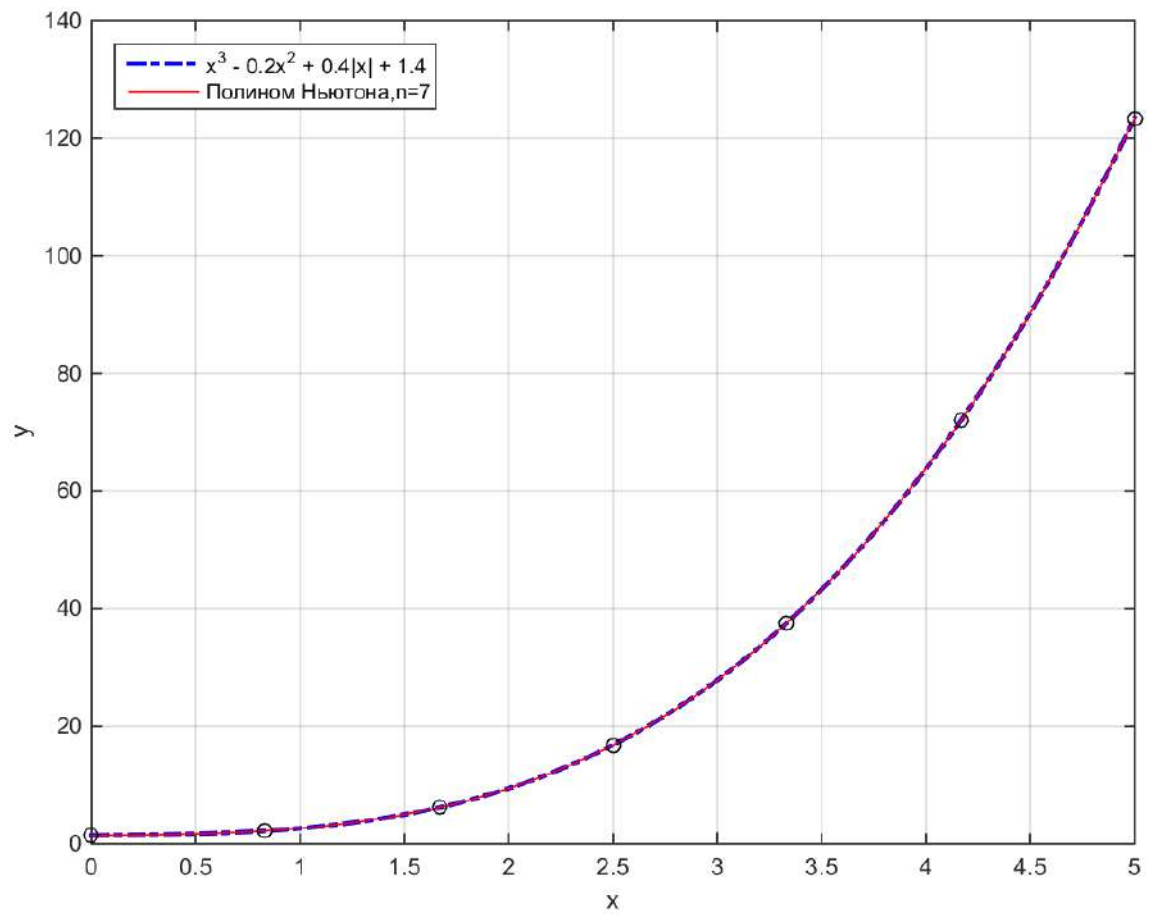


Рис. 17: График функции (2) и полинома Ньютона для $n=7$, равномерная сетка

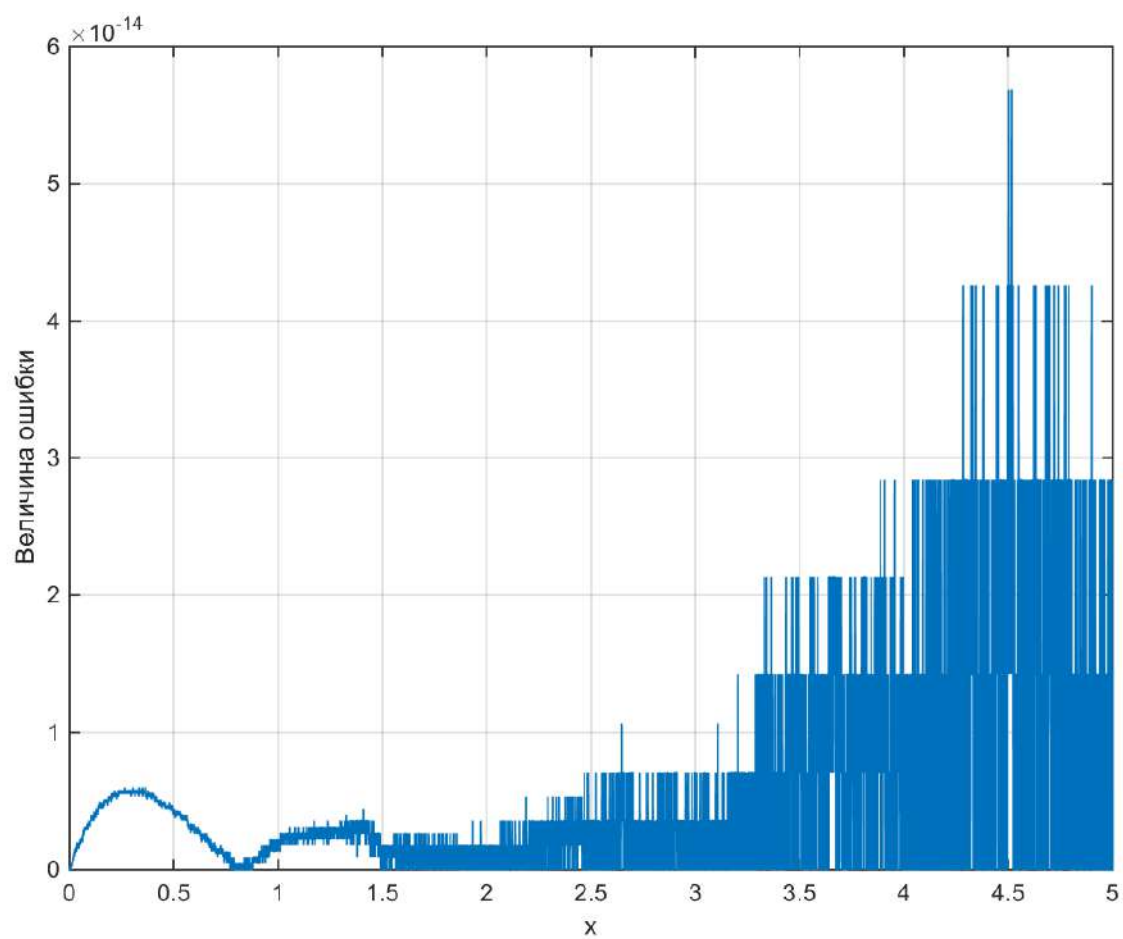


Рис. 18: График функции поточечной ошибки для $n=7$, равномерная сетка, функция (2)

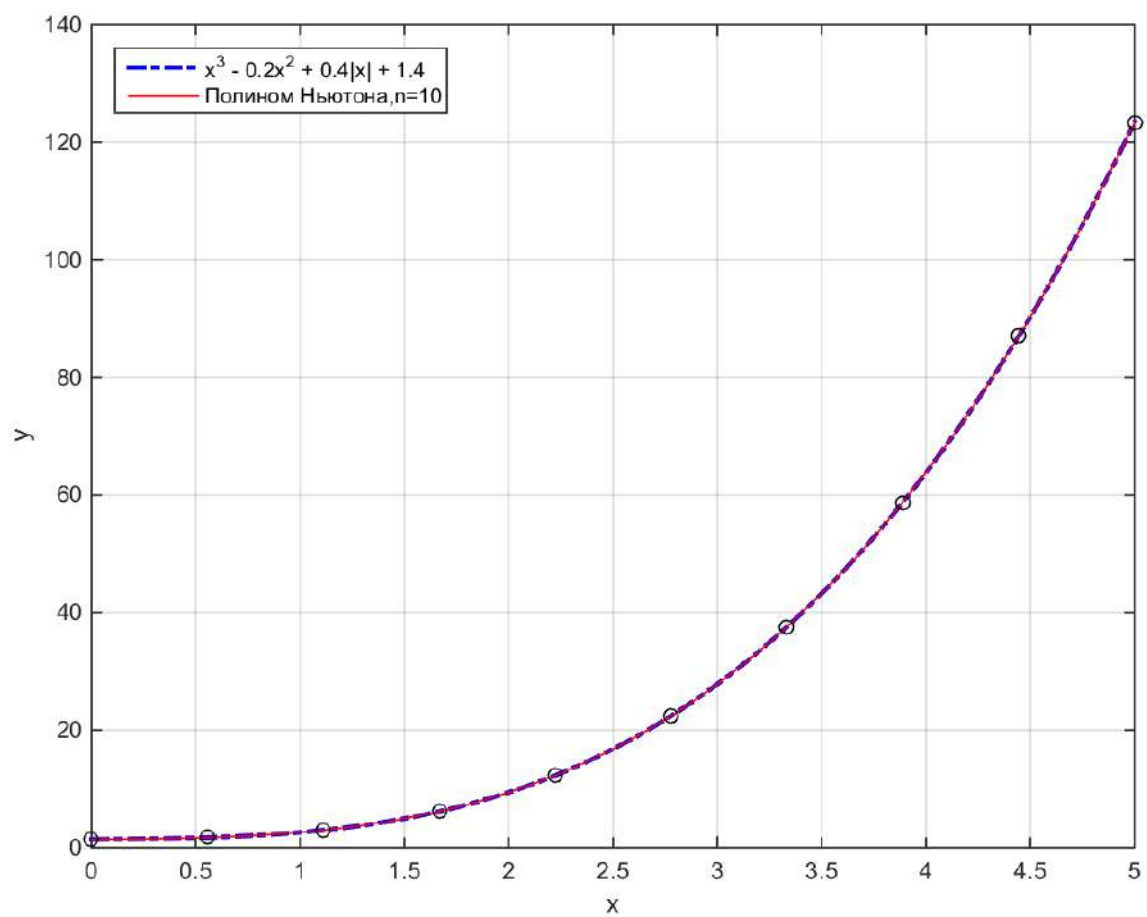


Рис. 19: График функции (2) и полинома Ньютона для $n=10$, равномерная сетка

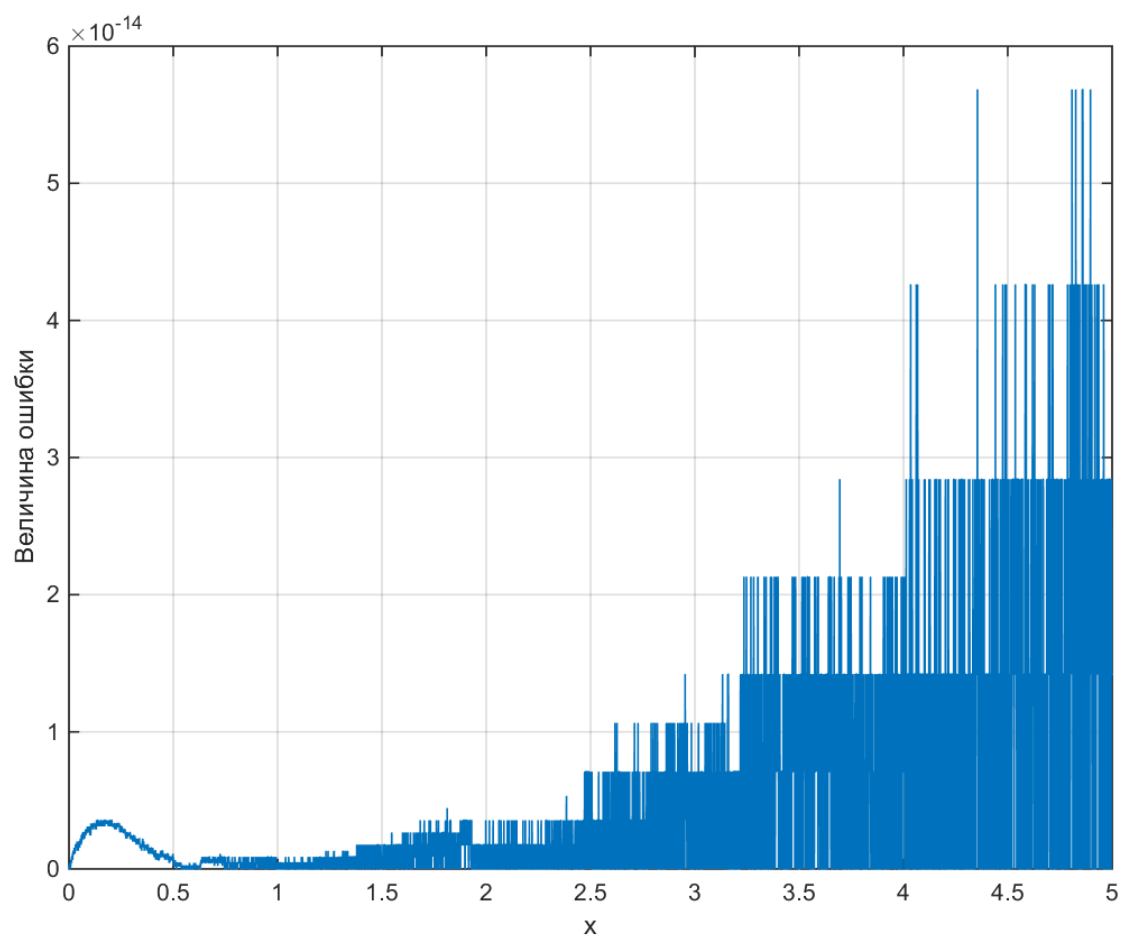


Рис. 20: График функции поточечной ошибки для $n=10$, равномерная сетка, функция (2)

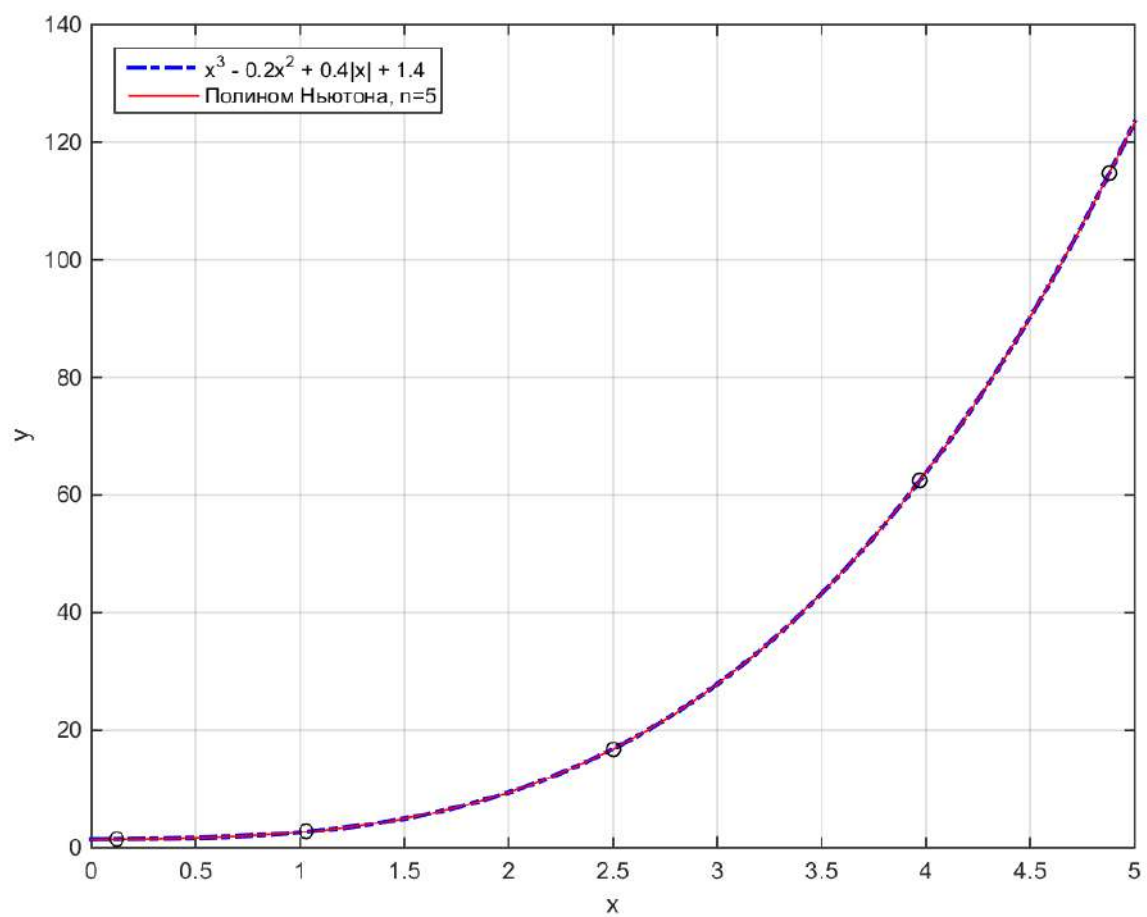


Рис. 21: График функции (2) и полинома Ньютона для $n=5$, сетка Чебышева

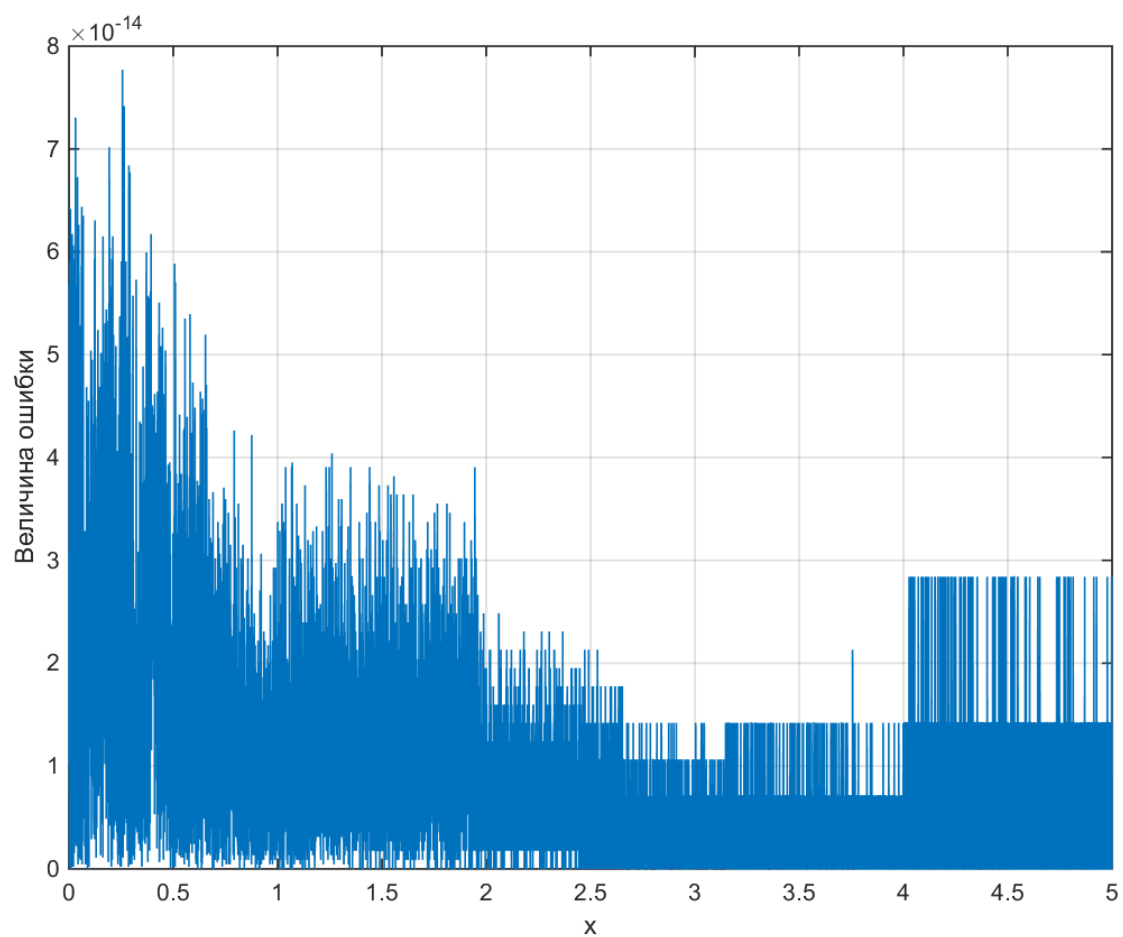


Рис. 22: График функции поточечной ошибки для $n=5$, сетка Чебышева, функция (2)

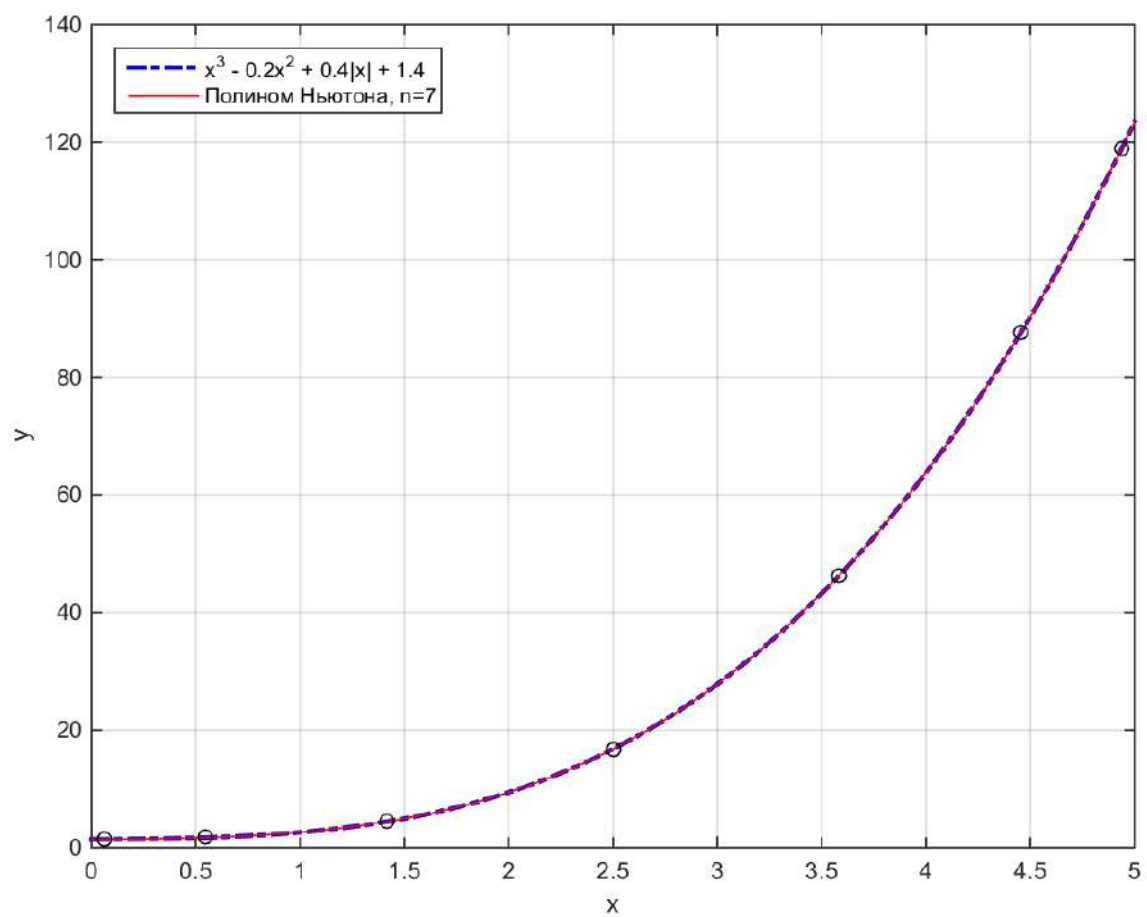


Рис. 23: График функции (2) и полинома Ньютона для $n=7$, сетка Чебышева

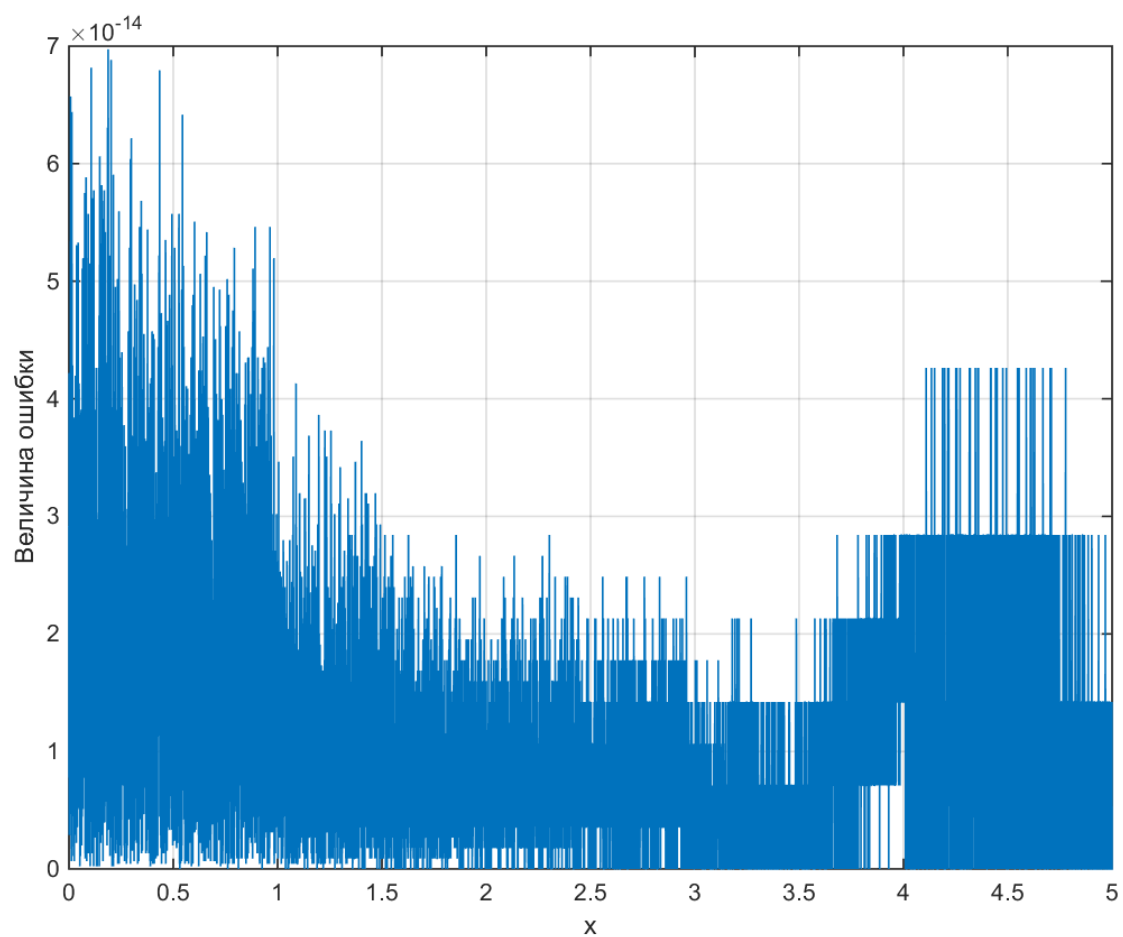


Рис. 24: График функции поточечной ошибки для $n=7$, сетка Чебышева, функция (2)

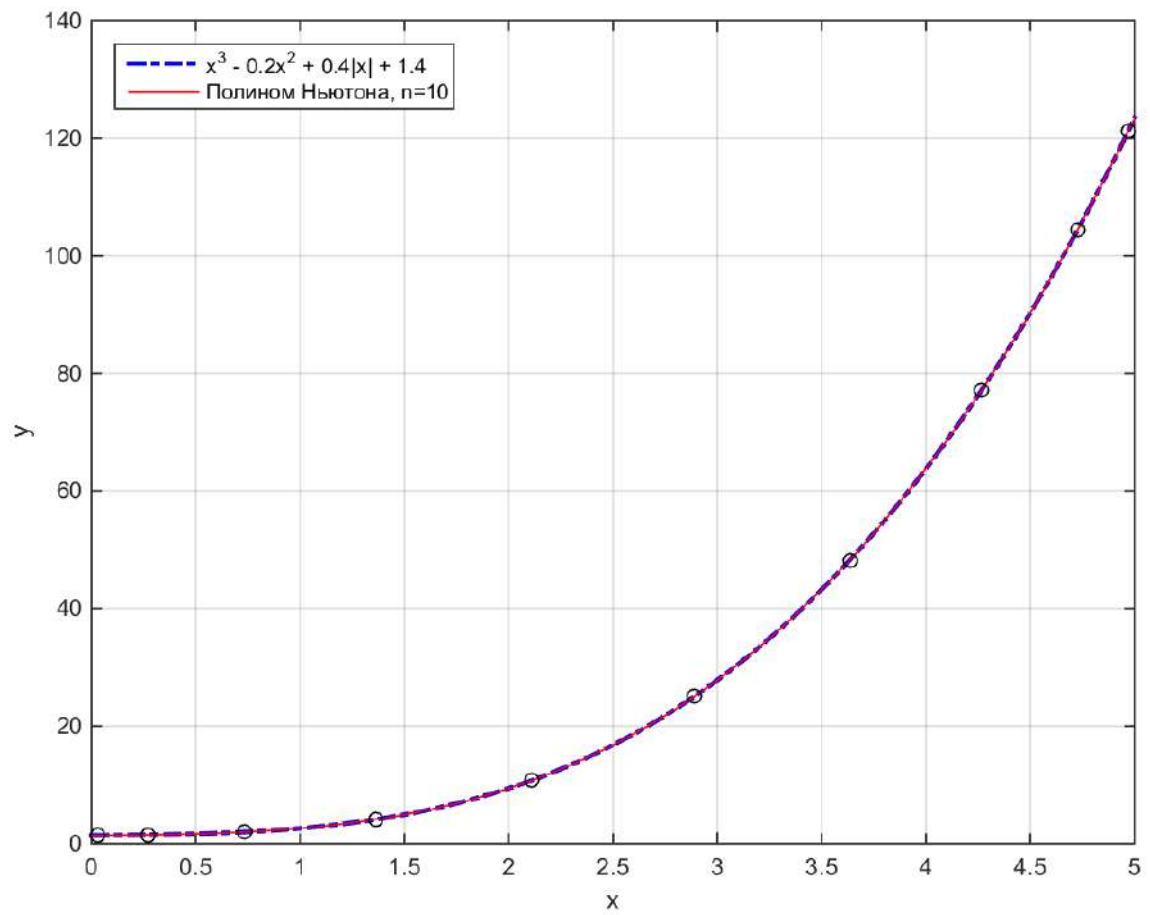


Рис. 25: График функции (2) и полинома Ньютона для $n=10$, сетка Чебышева

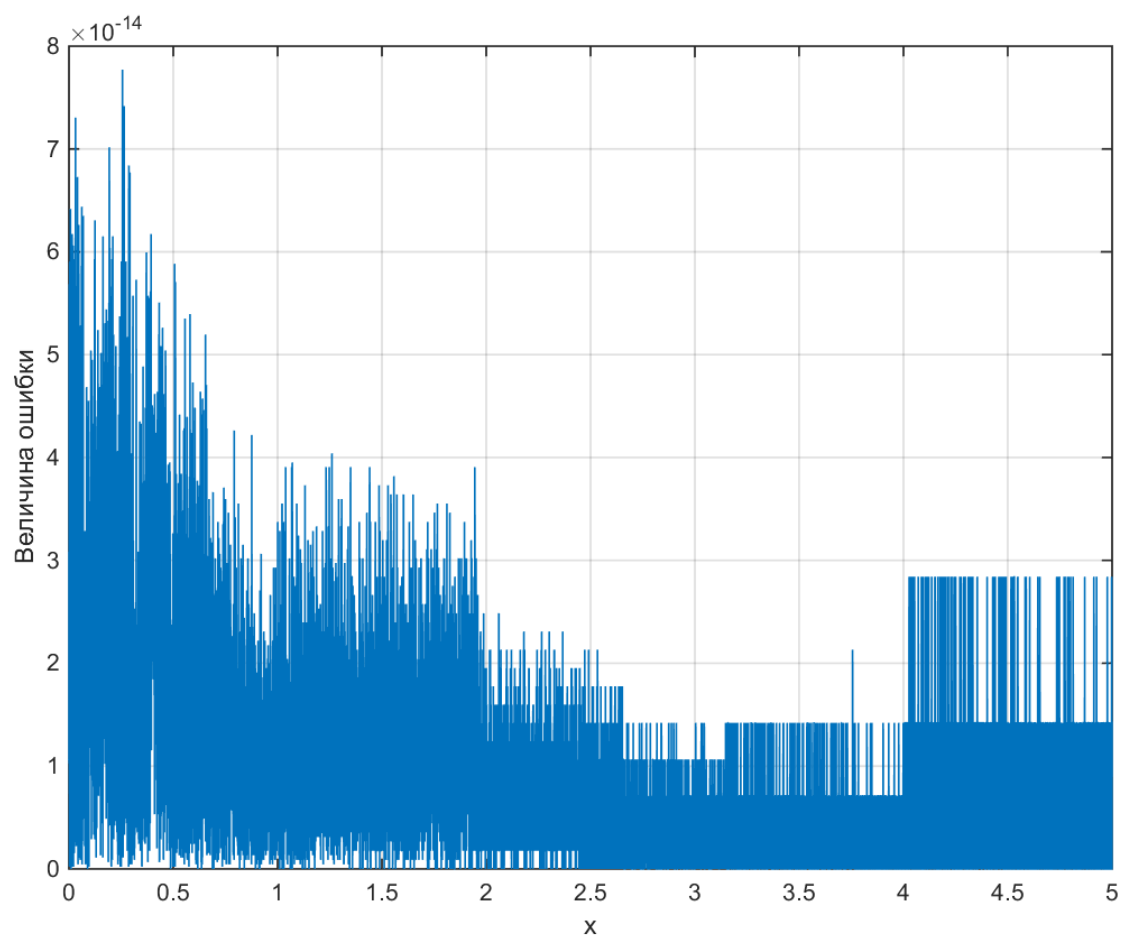


Рис. 26: График функции поточечной ошибки для $n=10$, сетка Чебышева, функция (2)

Большинство рисунков продемонстрировали ожидаемую картину - график полинома Ньютона приближен к графику изначально заданных функций. Также, можно заметить различие равномерной сетки и сетки Чебышева, например, на рис. 6 и рис. 14.

На графиках функций поточечной ошибки для функции (2) видно достаточно странное поведение. По моему предположению, это связано с порядком ошибки - 10^{-14} .

Линия теоретической ошибки для $n=10$

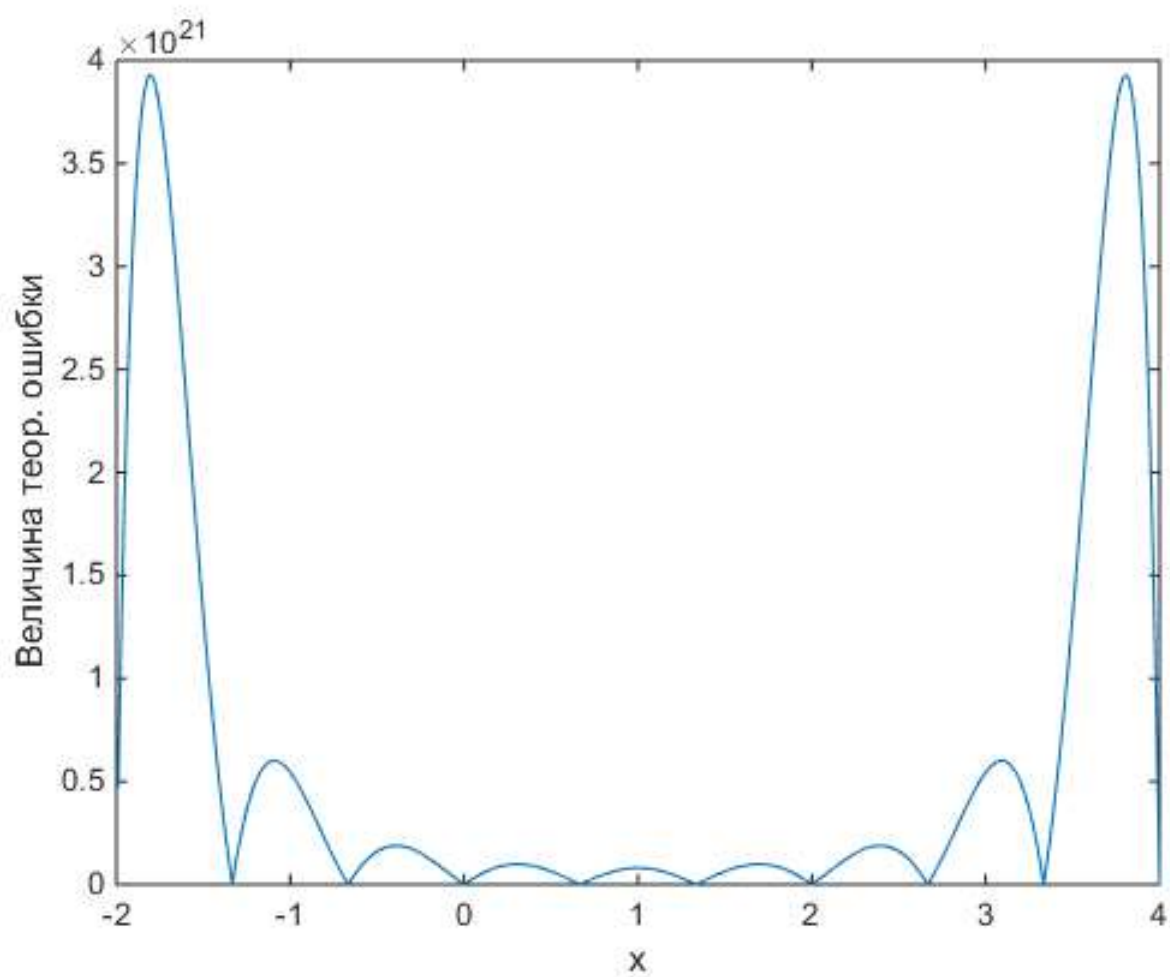


Рис. 27: Линия теор. ошибки, равномерная сетка, $n=10$, функция (1)

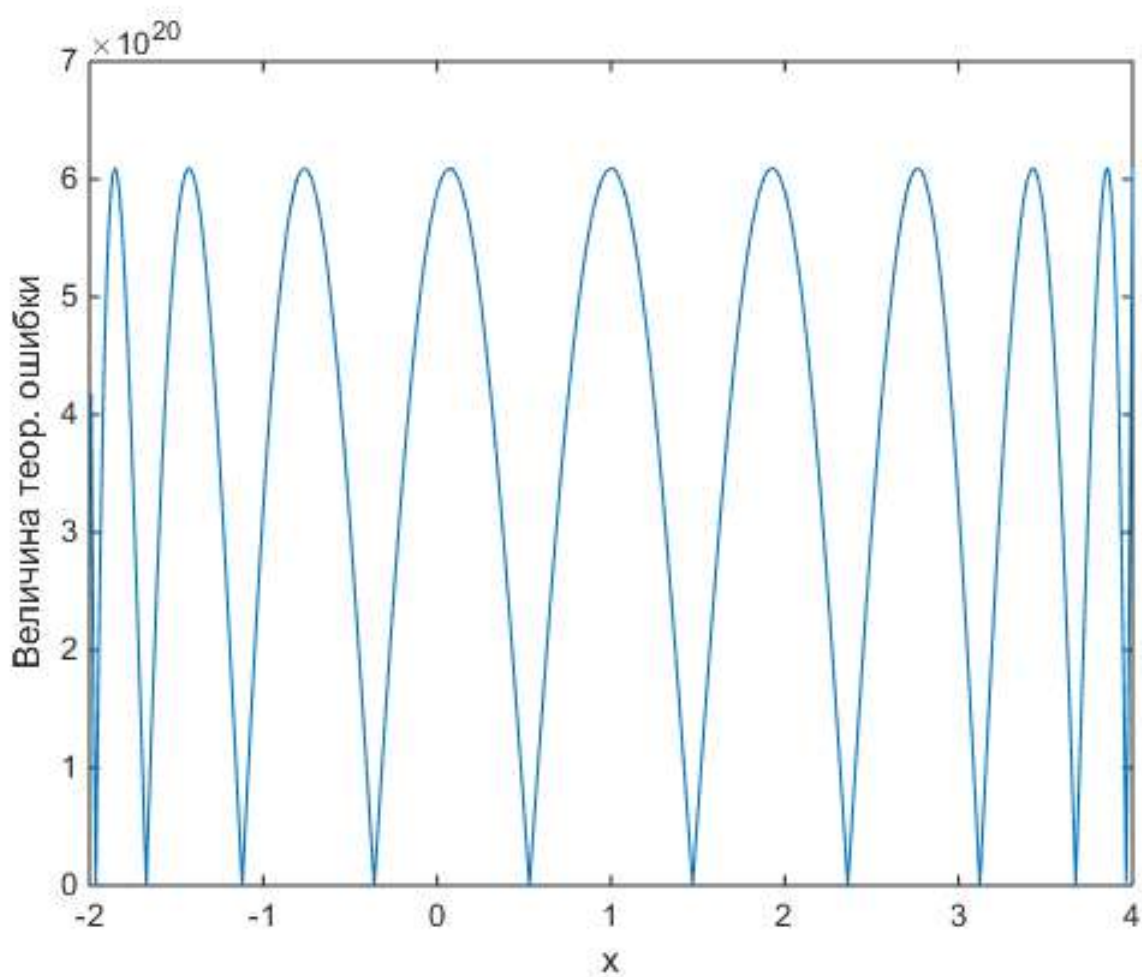


Рис. 28: Линия теор. ошибки, сетка Чебышева, $n=10$, функция (1)

Можно сравнить два заданных графика с рис. 6 и рис. 14 соответственно. Видно, что порядок линии теор. ошибки сильно выше, чем порядок фактической.

Следует отметить, что для выбранного числа узлов (10), линия теор. ошибки для функции (2) нулевая: 11-я производная полинома 3 степени. По этой причине, я исключил ее из рассмотрения.

Зависимость максимальной ошибки от числа узлов

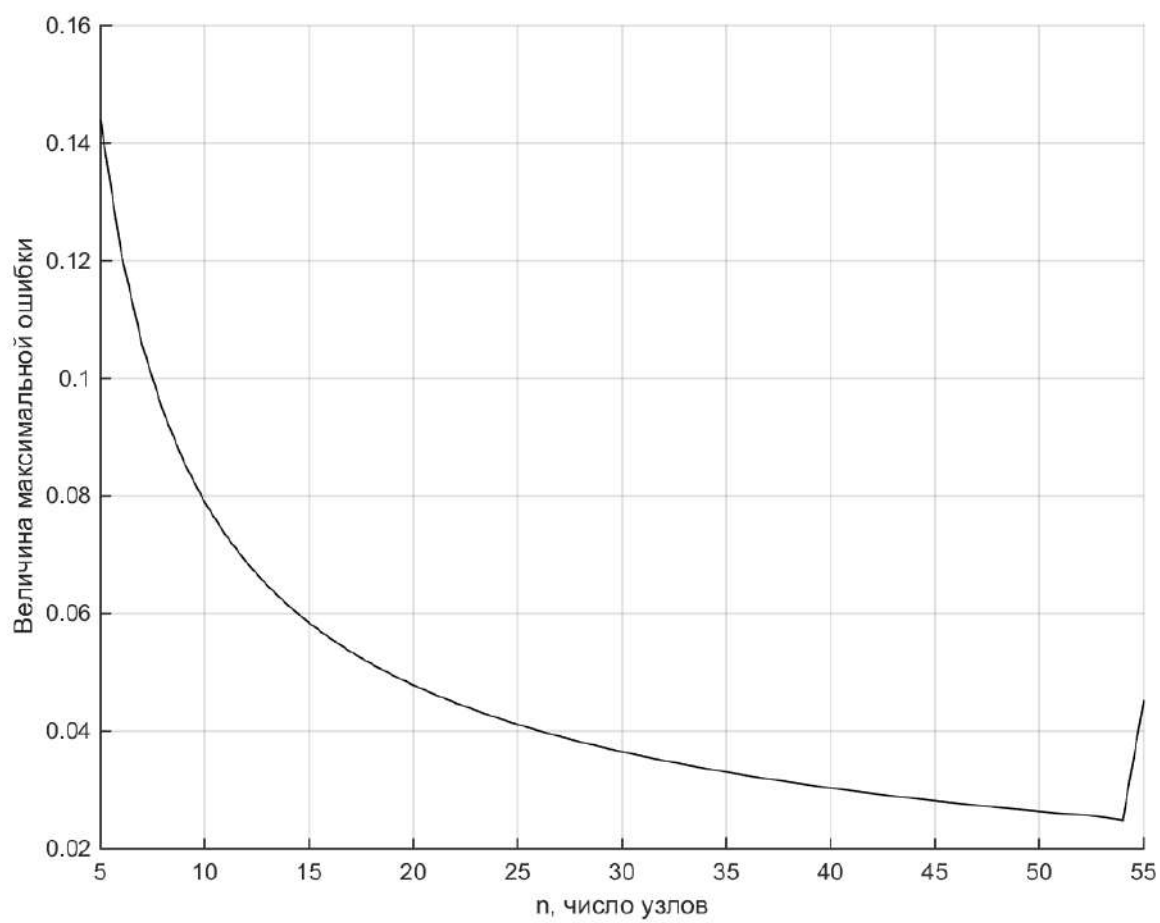


Рис. 29: Равномерная сетка, $5 \leq n \leq 55$, функция (1)

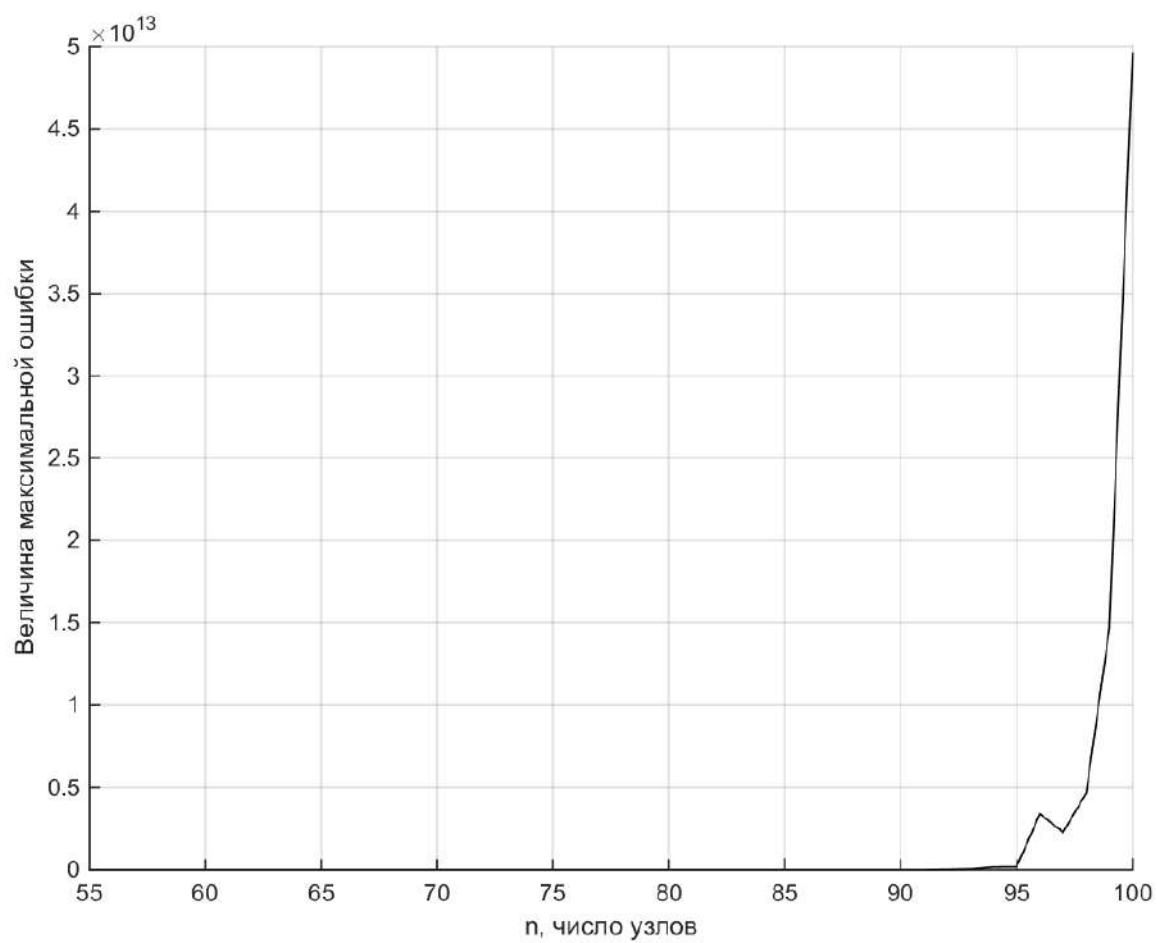


Рис. 30: Равномерная сетка, $55 \leq n \leq 100$, функция (1)

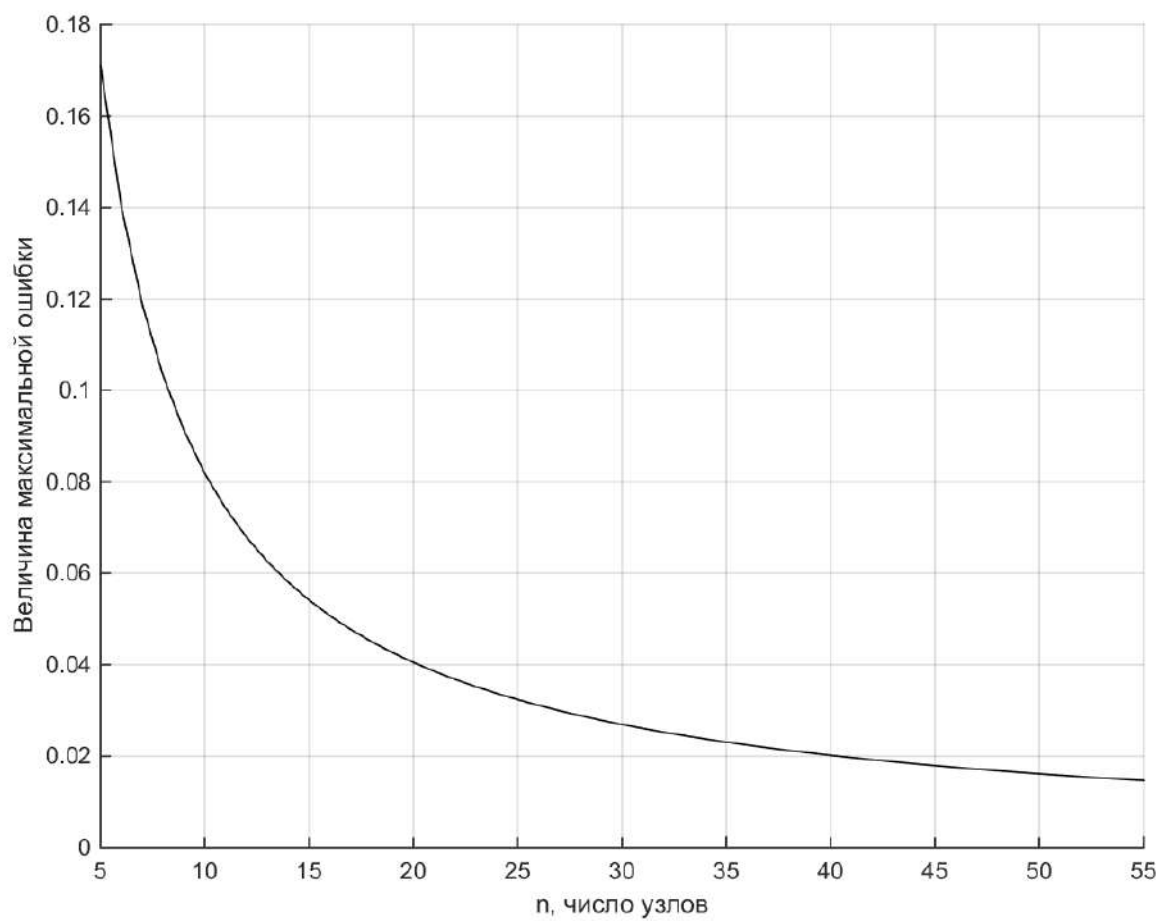


Рис. 31: Сетка Чебышева, $5 \leq n \leq 55$, функция (1)

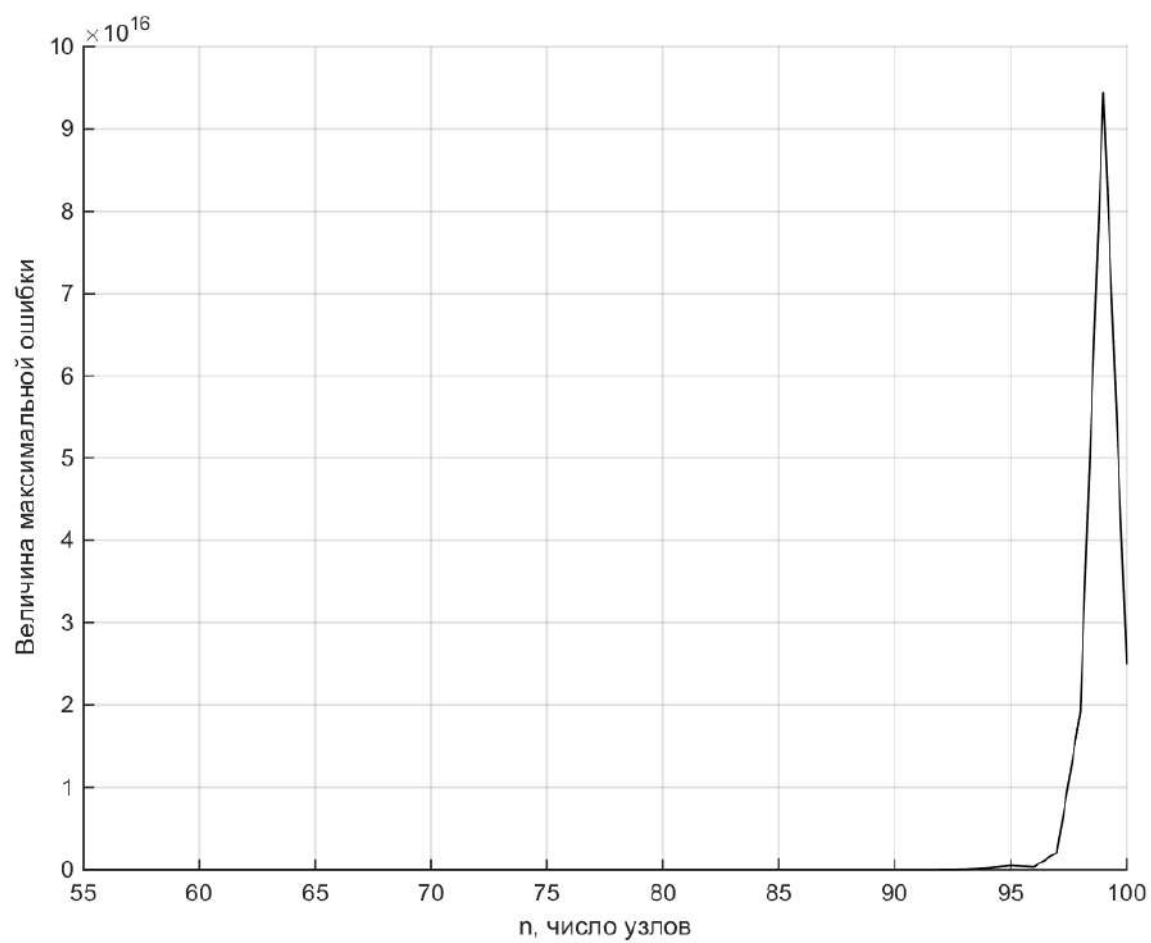


Рис. 32: Сетка Чебышева, $55 \leq n \leq 100$, функция (1)

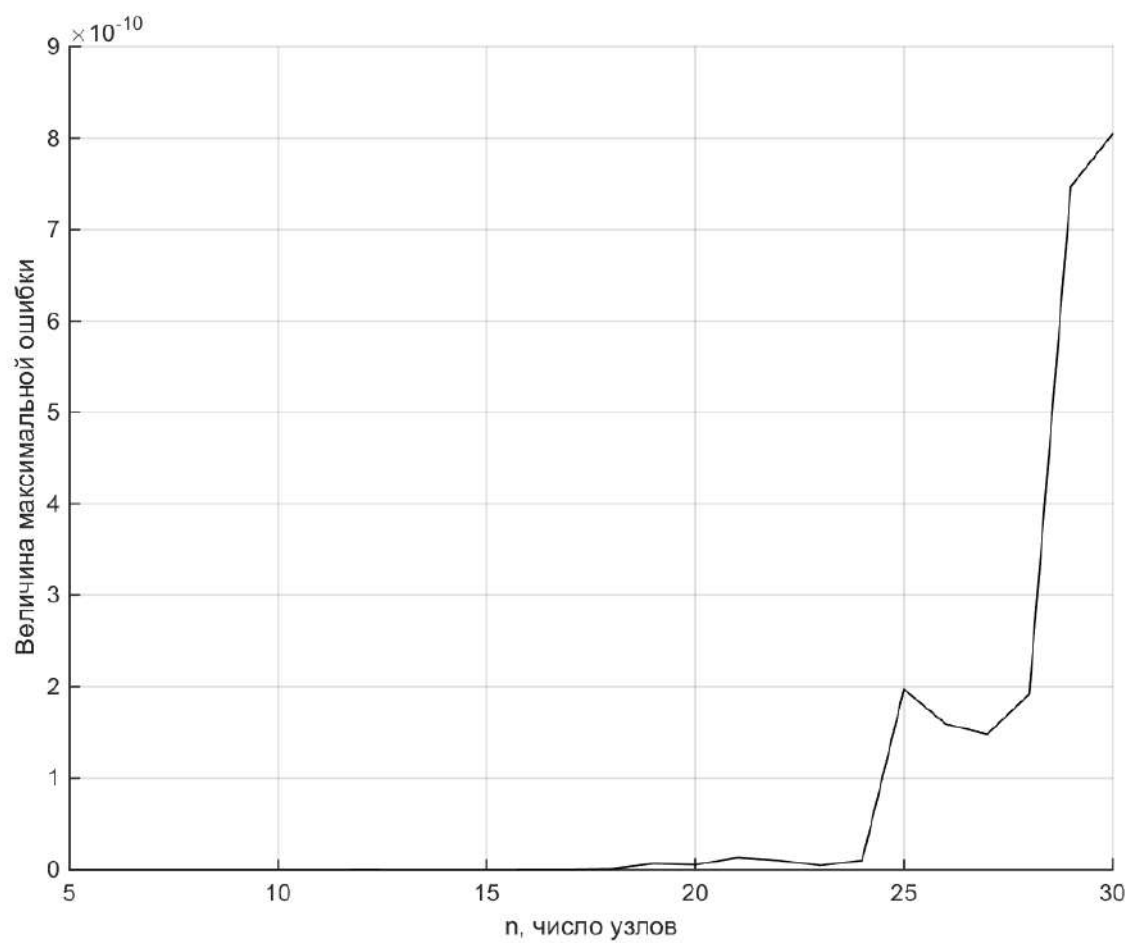


Рис. 33: Равномерная сетка, $5 \leq n \leq 30$, функция (2)

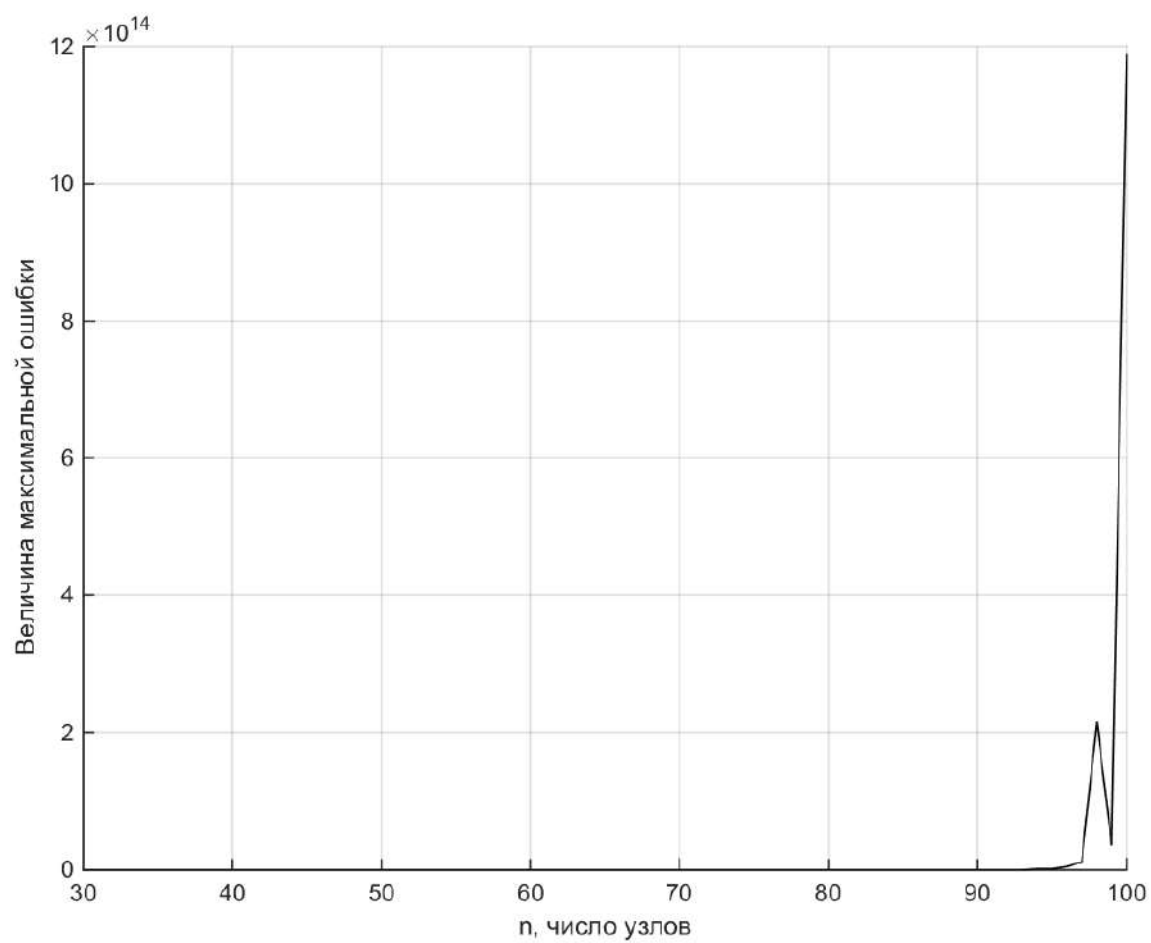


Рис. 34: Равномерная сетка, $30 \leq n \leq 100$, функция (2)

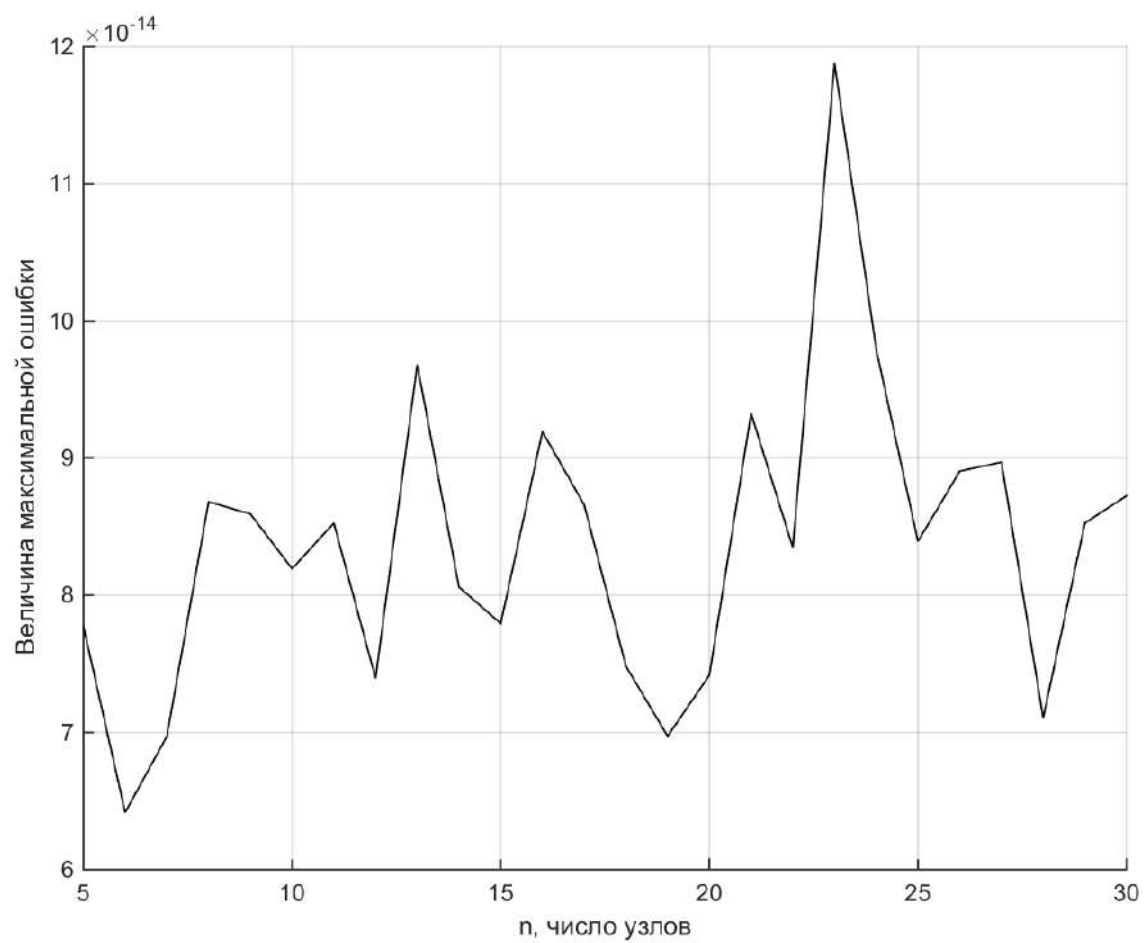


Рис. 35: Сетка Чебышева, $5 \leq n \leq 30$, функция (2)

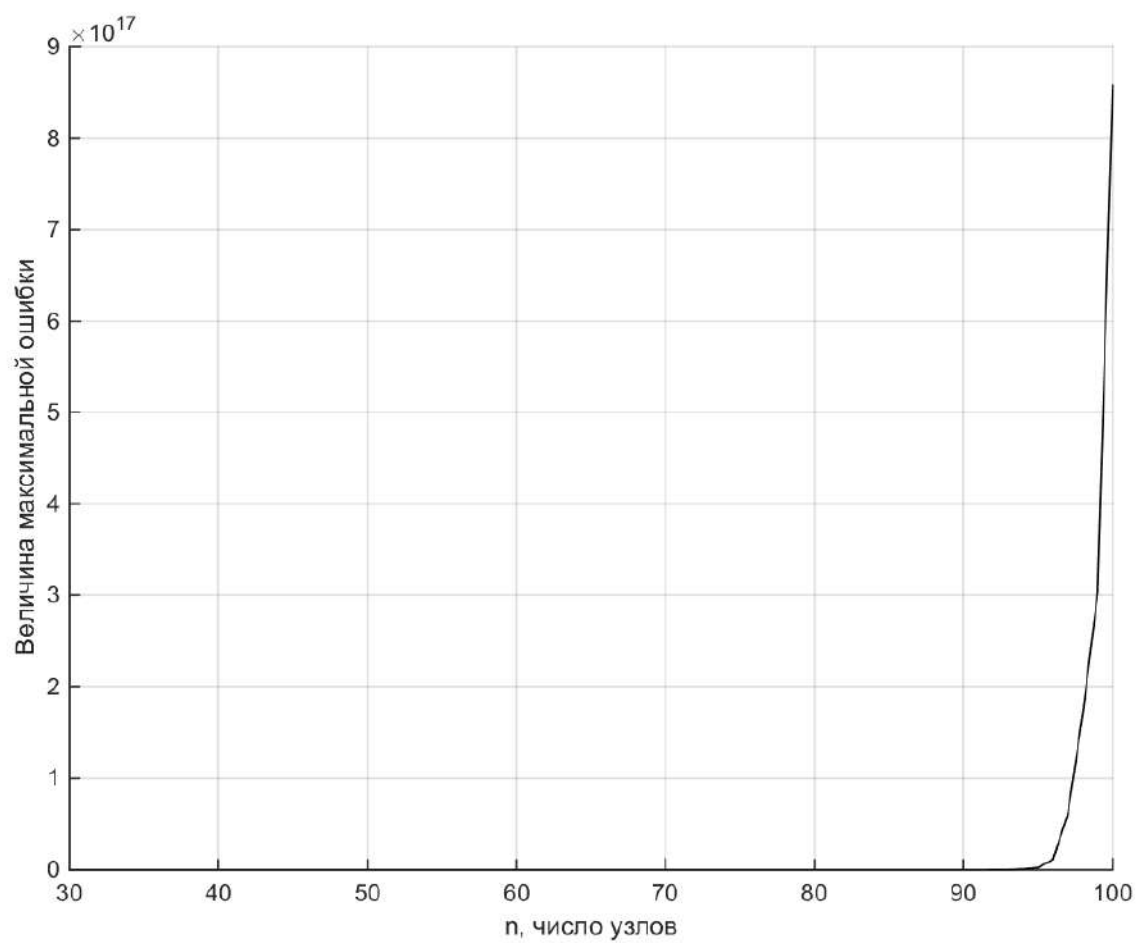


Рис. 36: Сетка Чебышева, $30 \leq n \leq 100$, функция (2)

Функция 1. Рисунки 29, 31 показывают, что процесс интерполирования сходится при n от 1 до 55. Рисунки 30, 32 же показывают, что при $n > 55$ процесс расходится.

Картина для функции 2 иная. Интерполяционный процесс расходится, однако погрешность при $n < 30$ сильно мала.

Зависимость ошибки в выбранных точках от степени интерполяционного полинома

Для функции 1 на равномерной сетке выбраны точки $x = -0.2006$ и $x = 2.7994$

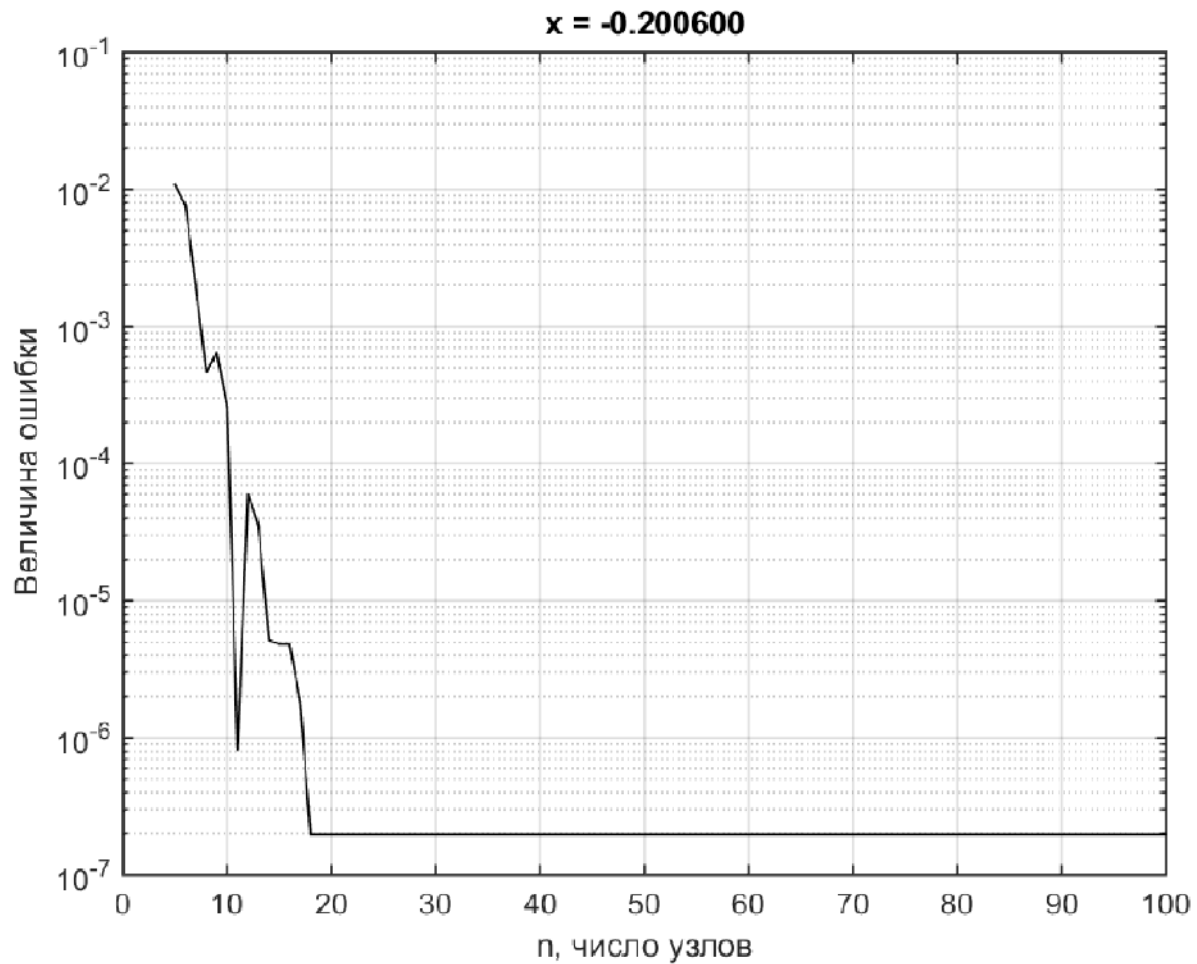


Рис. 37: Зависимость ошибки в точке x от числа узлов n , равномерная сетка, функция 1

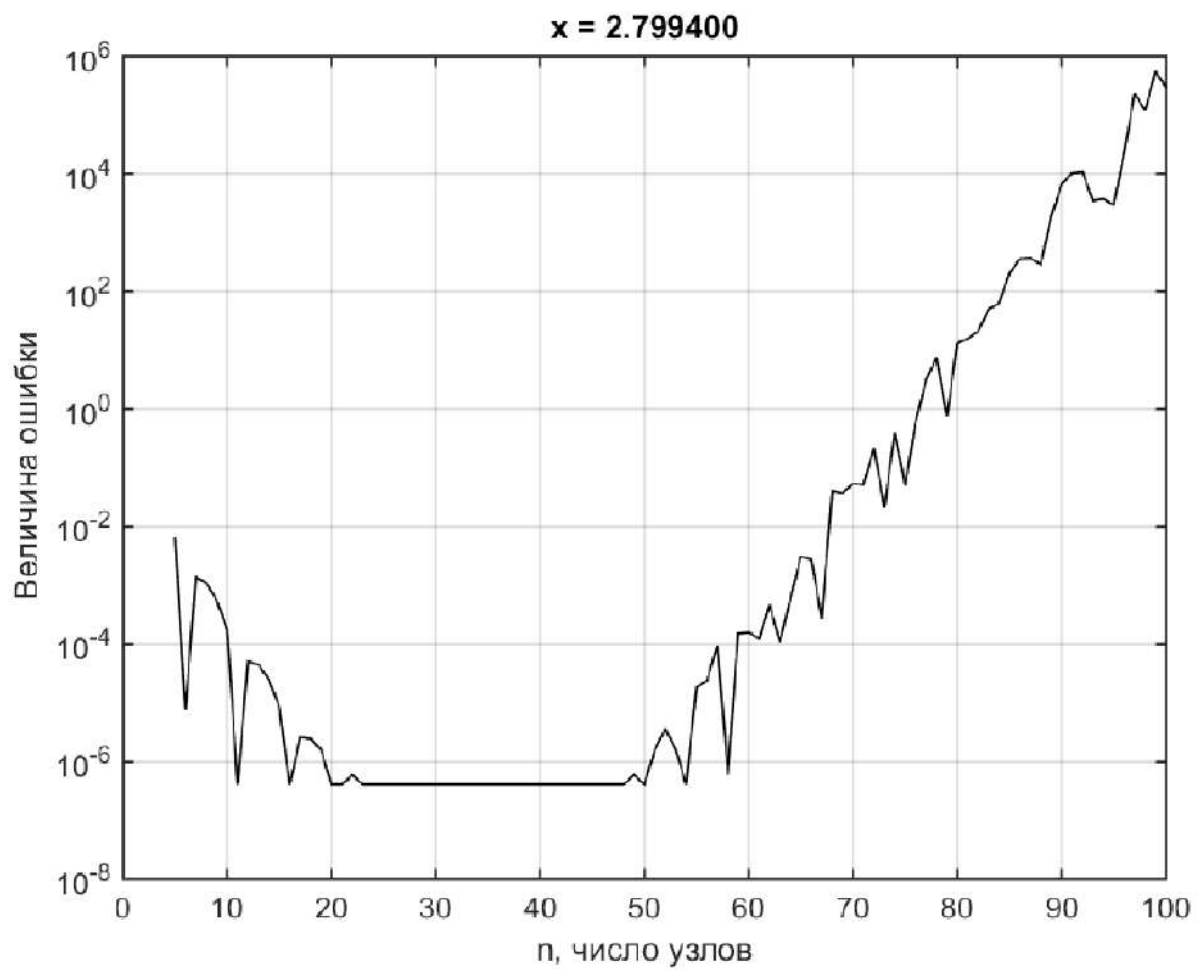


Рис. 38: Зависимость ошибки в точке x от числа узлов n , равномерная сетка, функция 1

Для функции 1 на сетке Чебышева выбраны точки $x = -0.2006$ и $x = 2.7994$

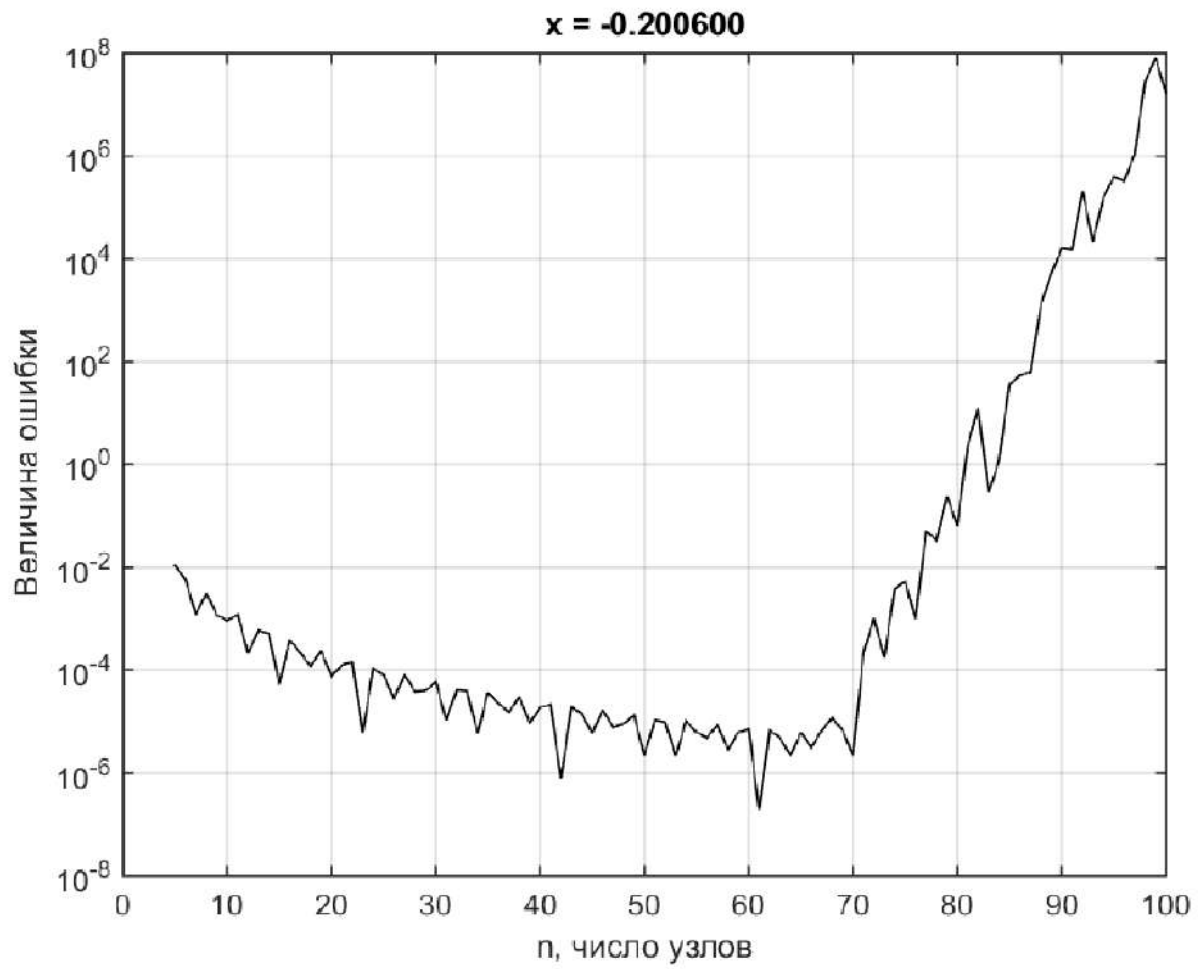


Рис. 39: Зависимость ошибки в точке x от числа узлов n , сетка Чебышева, функция 1

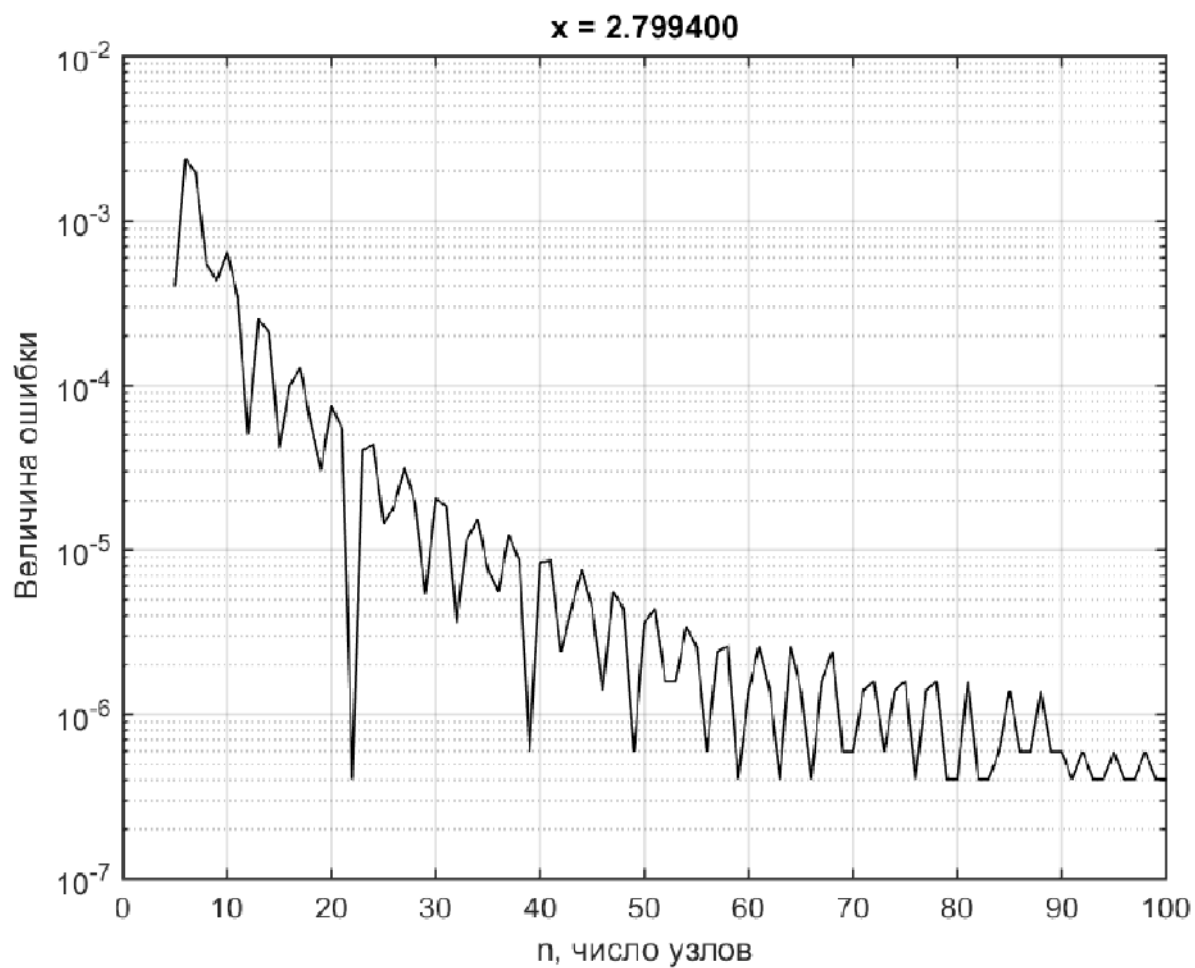


Рис. 40: Зависимость ошибки в точке x от числа узлов n , сетка Чебышева, функция 1

Для функции 2 на равномерной сетке выбраны точки $x = 1.4995$ и $x = 3.9995$

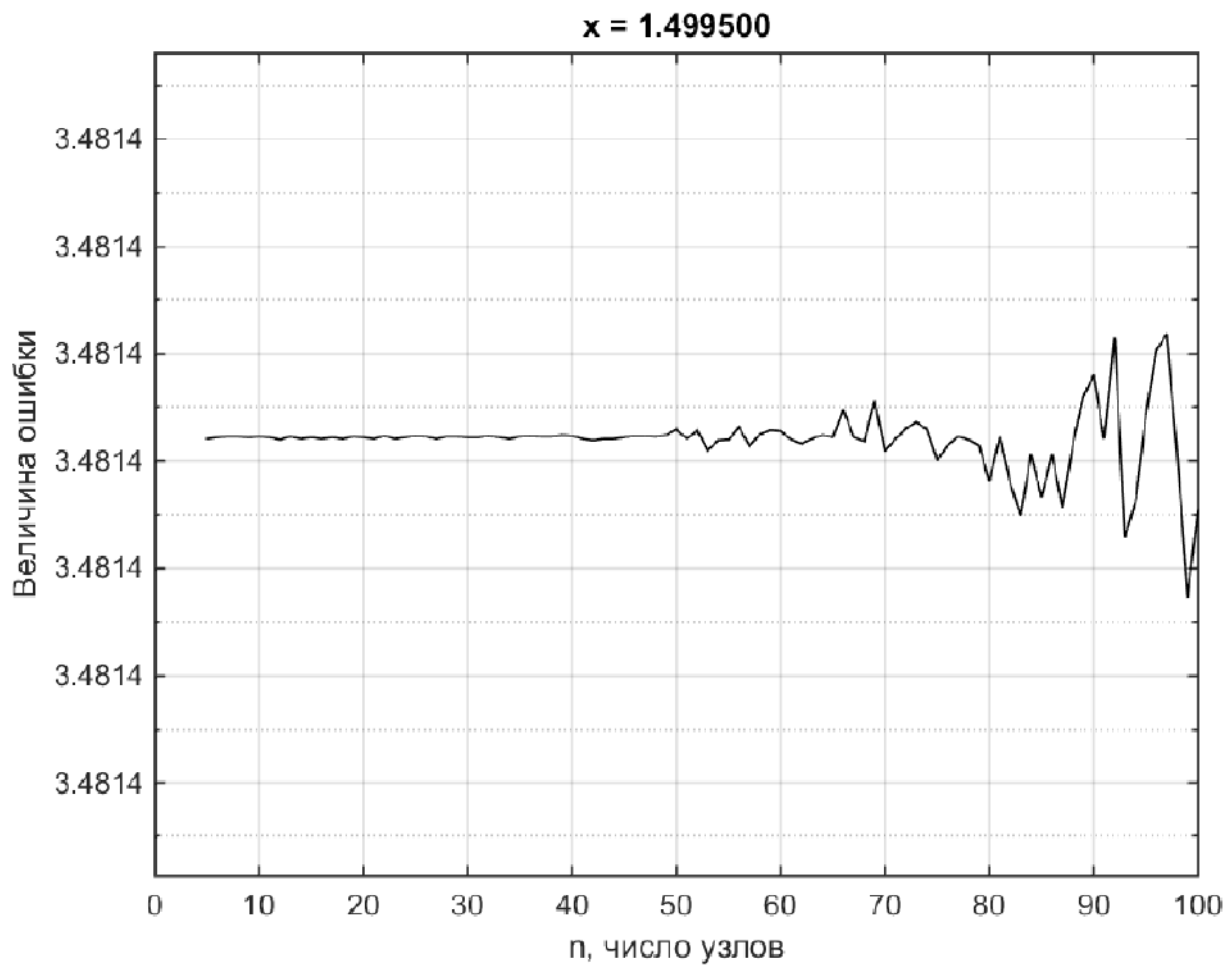


Рис. 41: Зависимость ошибки в точке x от числа узлов n , равномерная сетка, функция 2

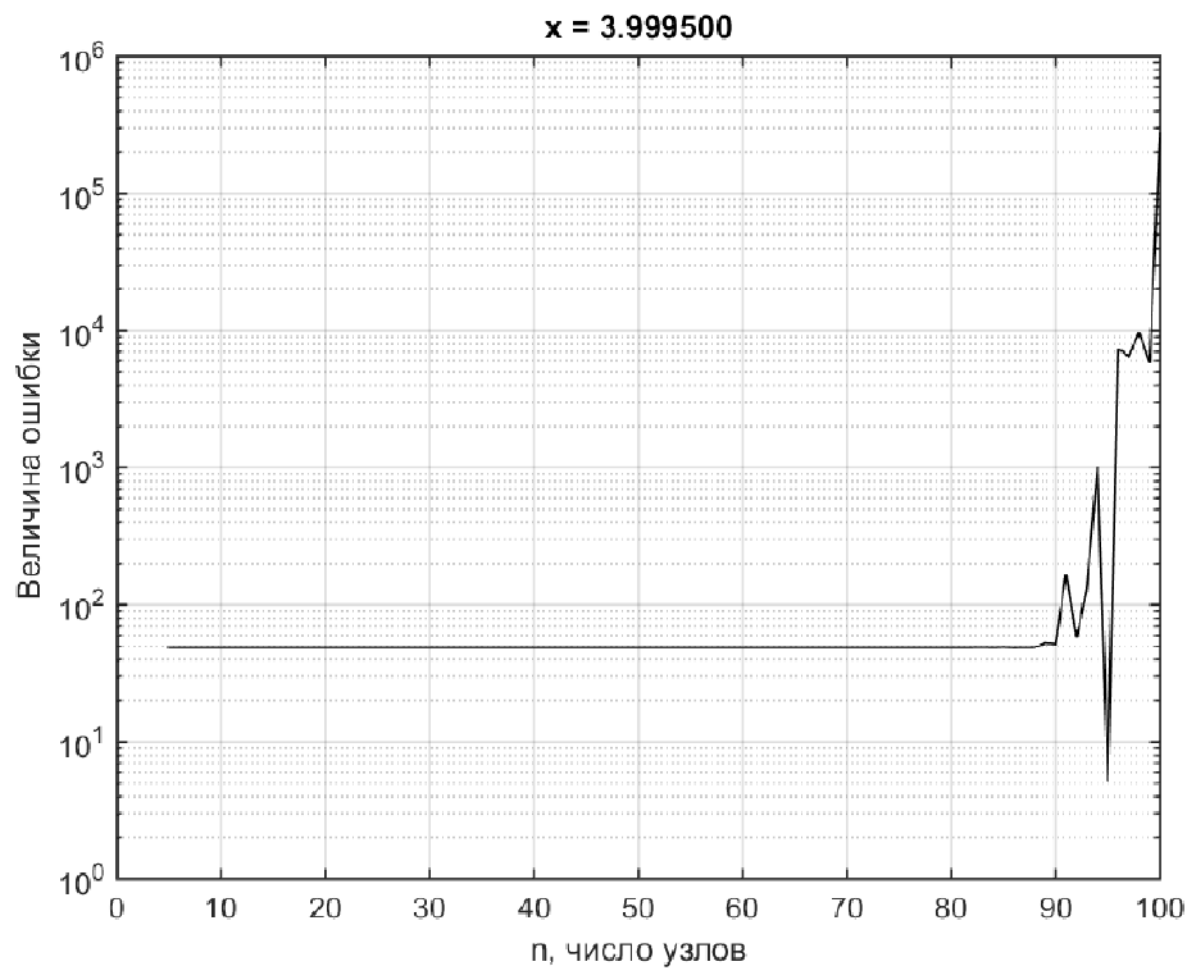


Рис. 42: Зависимость ошибки в точке x от числа узлов n , равномерная сетка, функция 2

Для функции 2 на сетке Чебышева выбраны точки $x = 1.4995$ и $x = 3.9995$

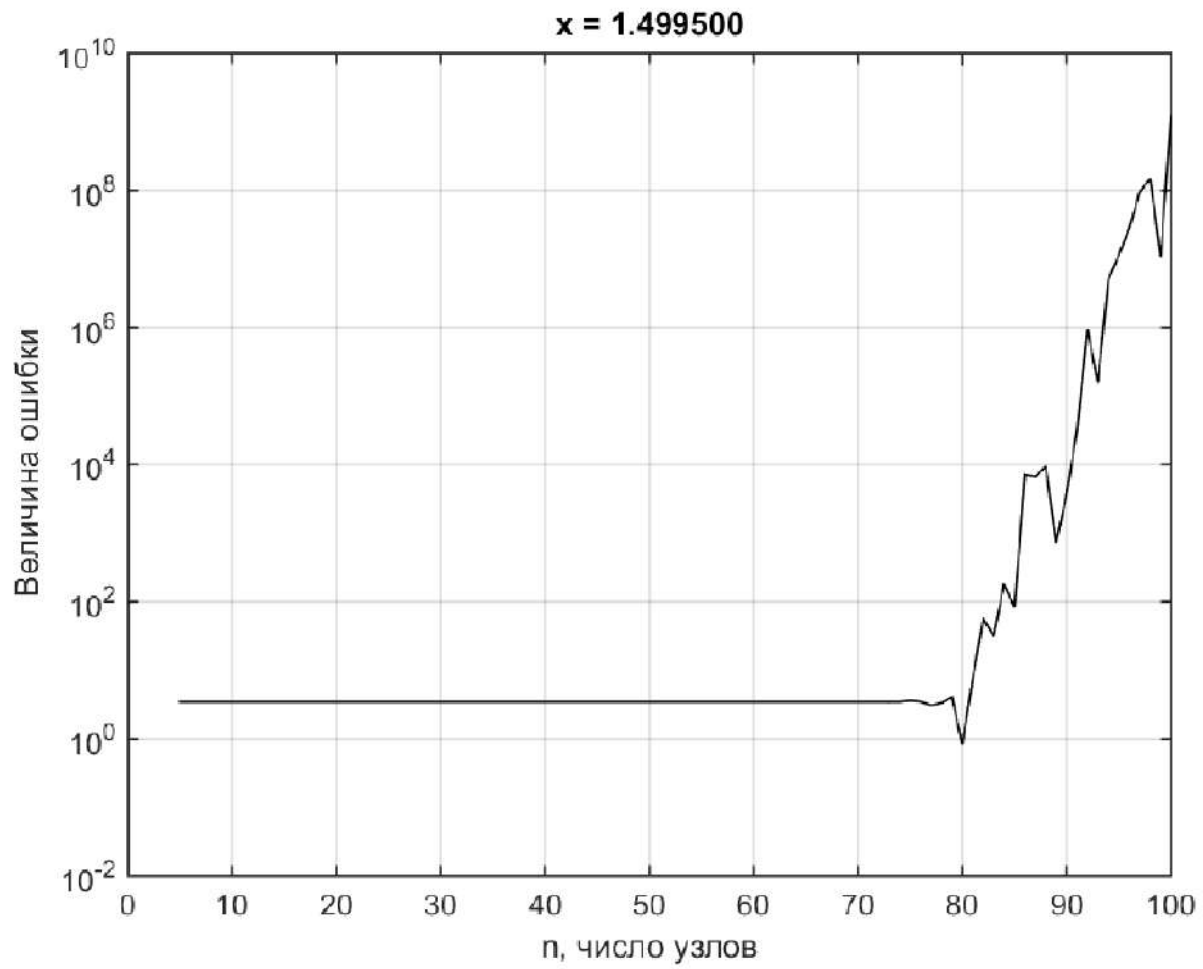


Рис. 43: Зависимость ошибки в точке x от числа узлов n , сетка Чебышева, функция 2

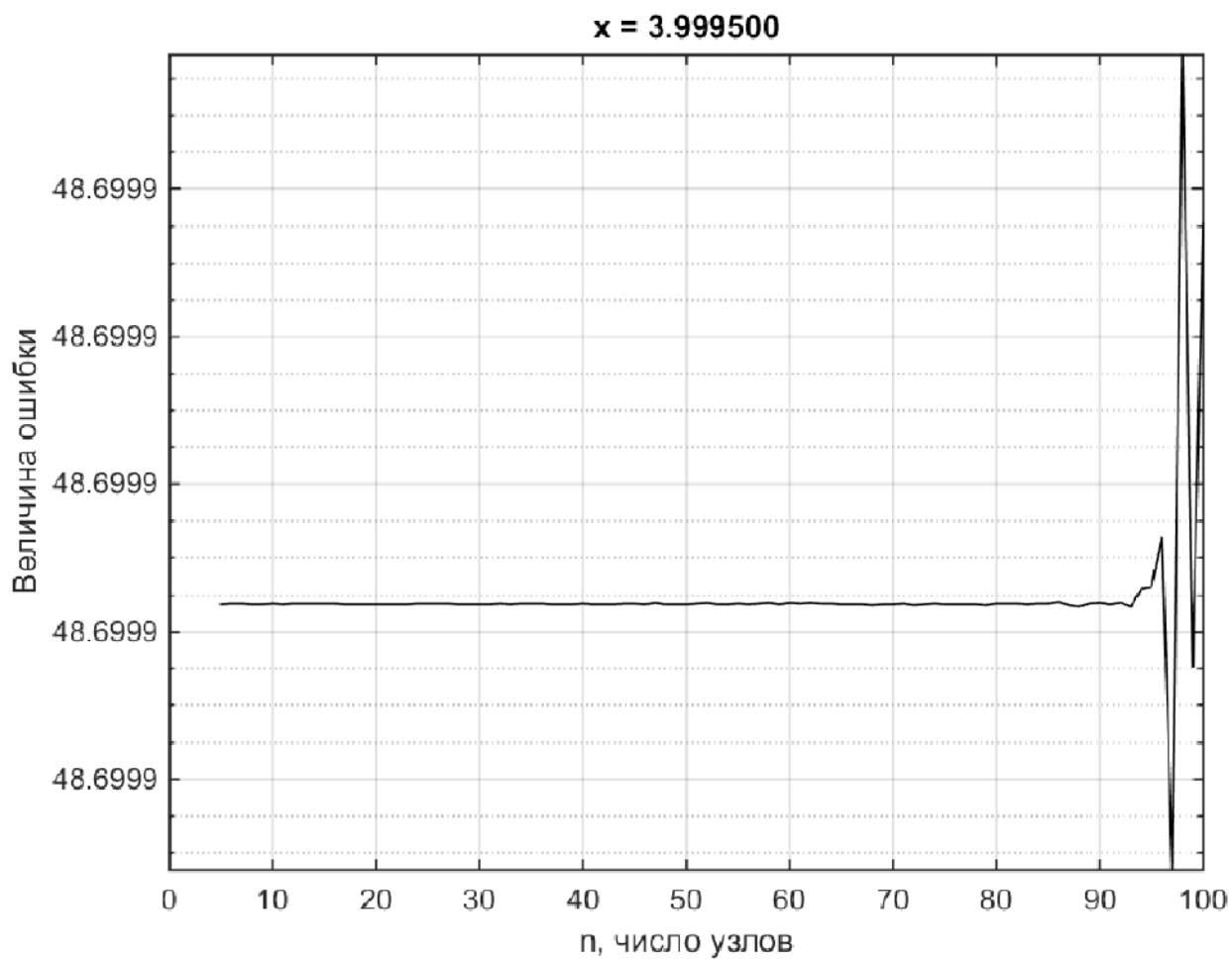


Рис. 44: Зависимость ошибки в точке x от числа узлов n , сетка Чебышева, функция 2

Дополнительное задание: влияние возмущений в исходных данных на результат

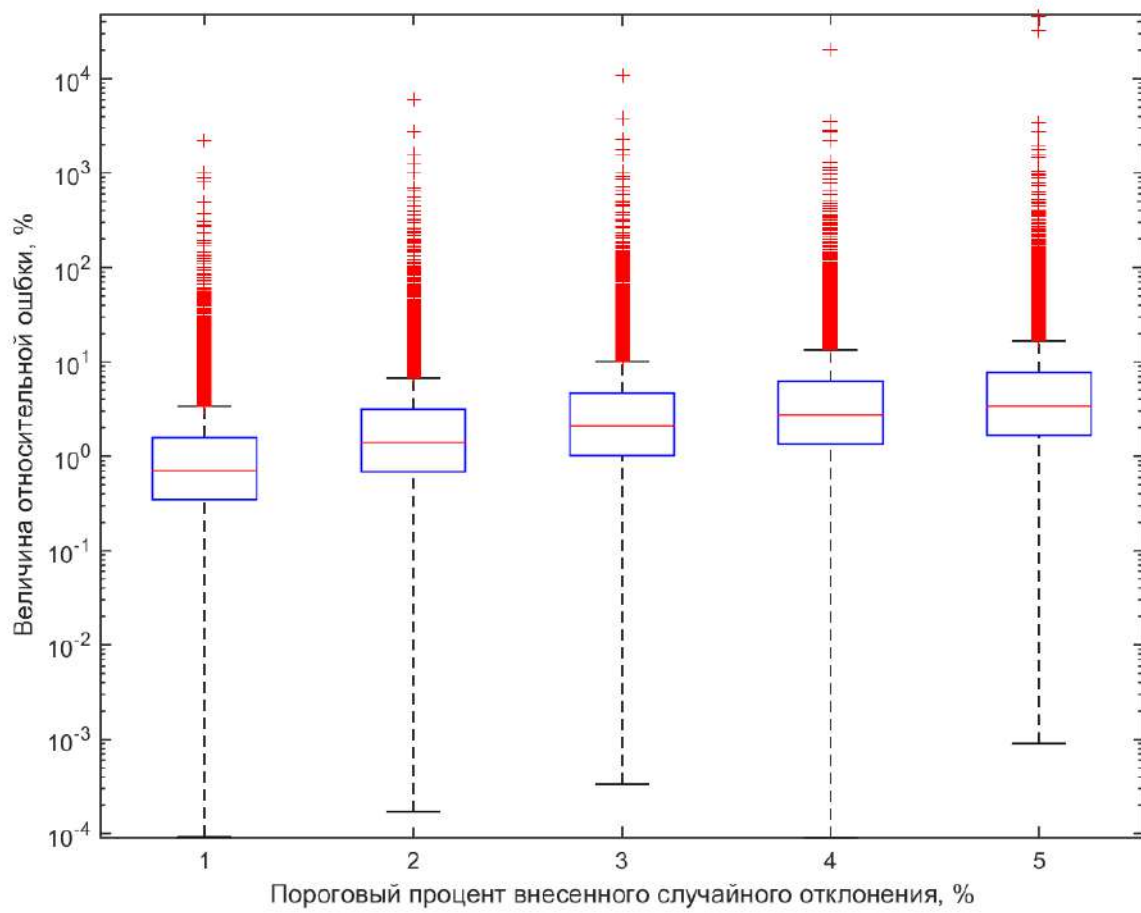


Рис. 45: Равномерная сетка, $n = 10$, функция 1

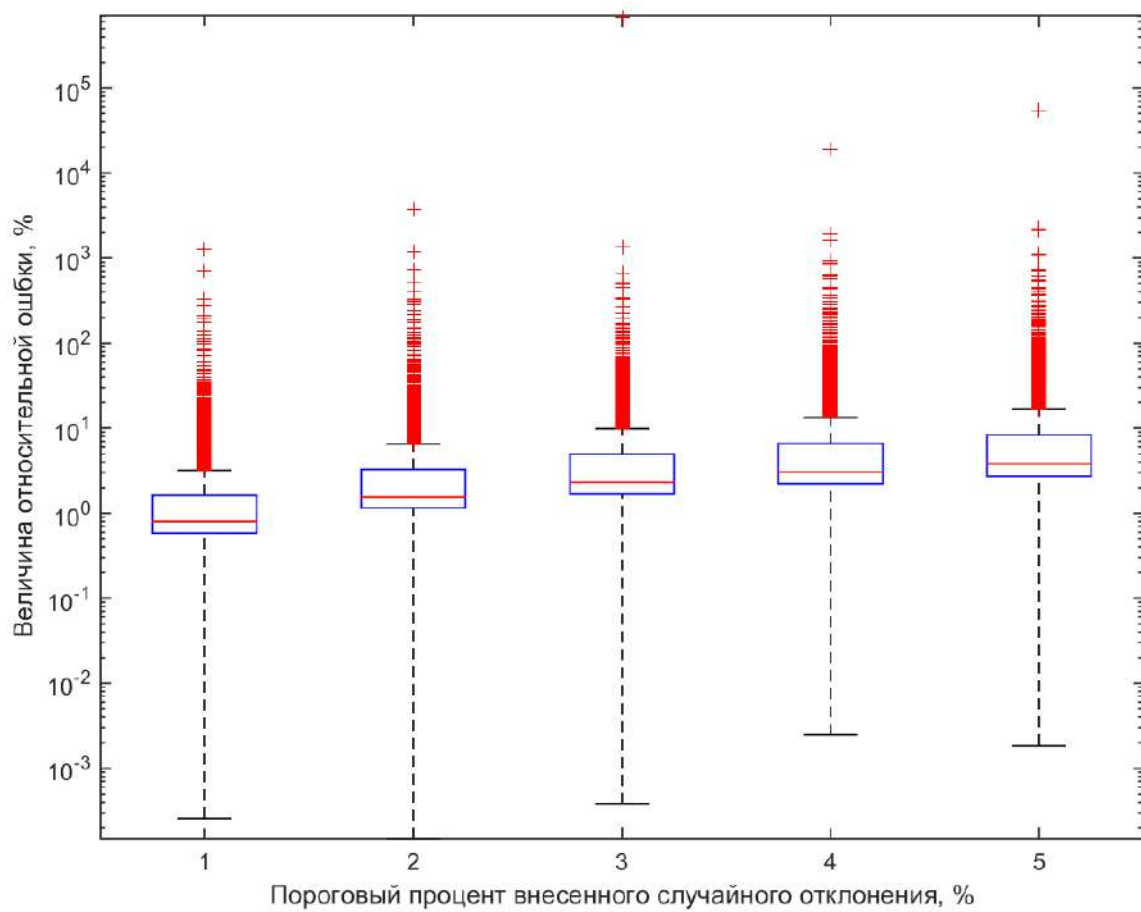


Рис. 46: Сетка Чебышева, $n = 10$, функция 1

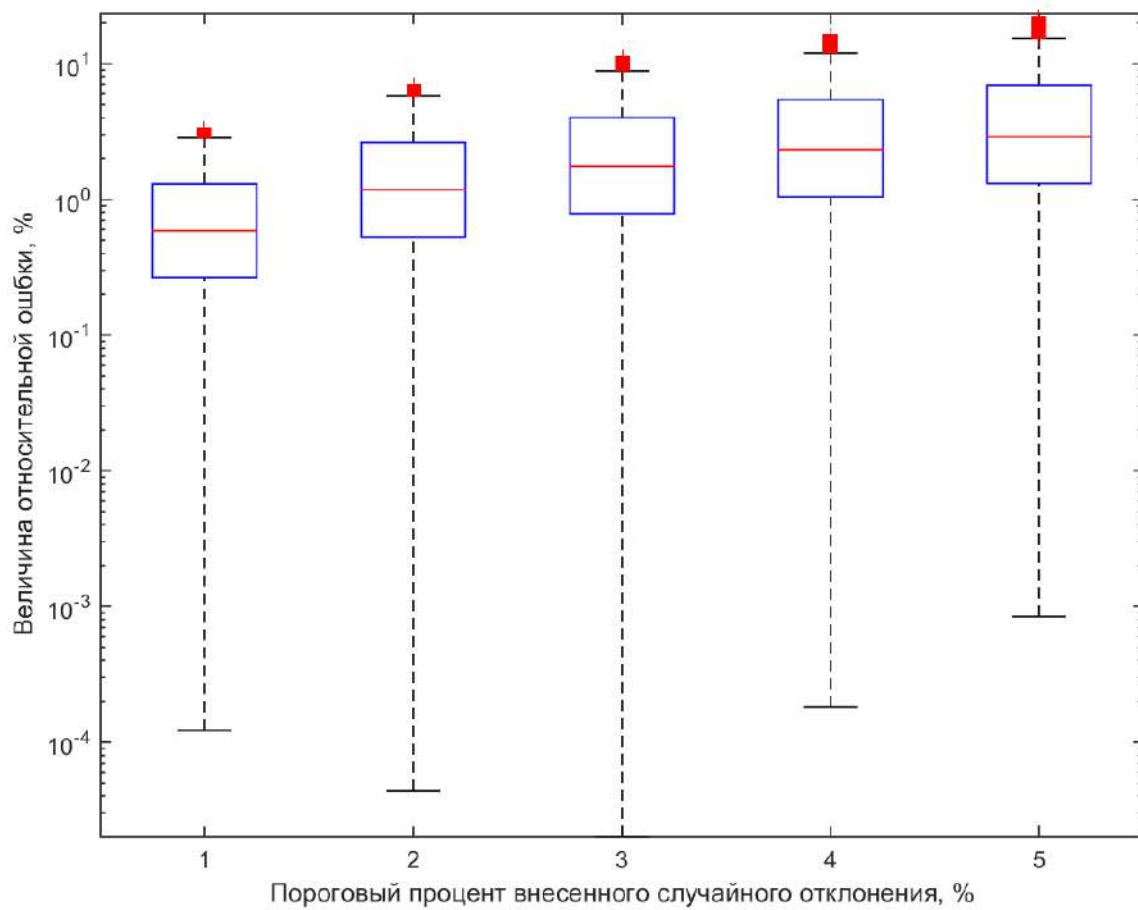


Рис. 47: Равномерная сетка, $n = 10$, функция 2

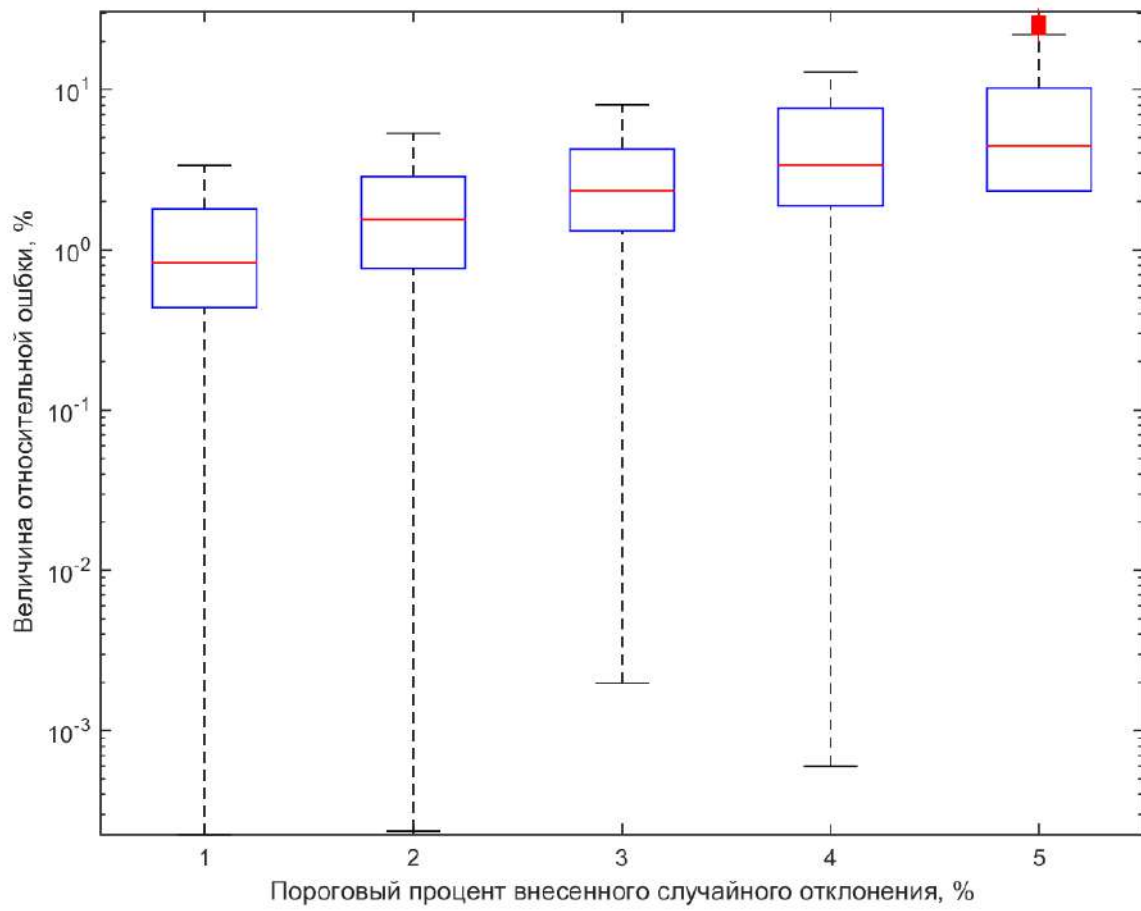


Рис. 48: Сетка Чебышева, $n = 10$, функция 2

Графики показывают, что с ростом возмущений в исходных данных растёт относительная погрешность интерполяции.

Выводы

1. Как показали эксперименты, наиболее выгодным вариантом интерполяции полиномом Ньютона является интерполяция на сетке Чебышева (избежание феномена Рунге) для числа узлов в диапазоне от 30 до 55ю.
2. Теоретическая ошибка сильно отличается от фактической
3. Влияние возмущений в исходных данных на результат интерполирования в среднем эквивалентно порядку этих возмущений.