Санкт-Петербургский Политехнический Университет
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Отчет по лабораторной работе № 10 "Решение интегралов с помощью квадратурных формул Ньютона-Котеса" дисциплина "Численные методы"

Выполнил студент гр. 5030102/20003 Ляпустин Е.О.
Преподаватель Козлов К.Н.

Апрель, 2024

Формулировка задачи и ее формализация

Вычисление приближенного значения определенного интеграла с помощью формулы левых прямоугольников

Формализация задачи:

Реализовать метод прямоугольников, а также правило Рунге, для получения значения заданной точности.

Поставленные задачи:

1. Ручной расчет провести для 1, 2 и 4х разбиений отрезка, оценить точность вычисления интеграла
2. Написать программу для вычисления приближенного значения интеграла с заданной точностью с помощью обобщенной формулы.
3. График зависимости фактической ошибки от заданной точности, отметить линию биссектрисы.
4. График зависимости числа итераций от заданной точности
5. График фактической ошибки от длины отрезка разбиения, использовать логарифмический масштаб по основанию 2. По графику определить порядок точности применяемой формулы и вычислить константу.

Также, вариант подразумевает выполнение следующего доп. задания:

Для заданной функции найти выражение для теоретической ошибки и добавить линии максимальной и минимальной теоретической ошибки на графики ошибок.

Алгоритм метода

Отрезок интегрирования $[a;b]$ разбивается на N отрезков. Для каждого отрезка вычисляется площадь образуемого им и функцией (слева) прямоугольника.

$$S = H\sum_{i=1}^{N} f(a+iH)$$

S - приближенное значение интеграла, H - длина отрезка разбиения.

По правилу Рунге, число N удваивается, пока

$$|S_{2N} - S_N| > \epsilon$$

где ϵ - заданная допустимая ошибка результата численного интегрирования.

Предварительный анализ задачи

Вариант подразумевает вычисление определенного интеграла функции

$$x^5 - 2.9x^3 + 6.5x^2 - 7x \tag{1}$$

Пределы интегрирования выбраны следующие: $[0; 1.35]$.

$f(x) = x^5 - 2,9x^3 + 6,5x^2 - 7x$

$a = 0$

$b = 1,35$

$$I = \int_0^{1,35} f(x)\,dx = -2,44712$$

(1) $[0; 1,35] \Rightarrow \{[0; 0,675], [0,675; 1,35]\}$

(2) $[0; 1,35] \Rightarrow \{[0; 0,3375], [0,3375; 0,675], [0,675; 1,0125], [1,0125; 1,35]\}$

Для всего отрезка $[a, b]$:

$$S = (1,35 - 0) \cdot f(0) = 0, \quad \text{Ошибка: } 2,44712$$

Для (1) разбиения:

$$S = \frac{(b-a)}{2} \cdot (f(0) + f(0,675)) = -2,51520 \cdot \frac{1,35}{2} = -1,69776$$

Ошибка: $0,75 \sim 10^0$

Для (2) разбиения:

$$S = \frac{(b-a)}{4}(f(0) + f(0,3375) + f(0,675) + f(1,0125)) =$$

$$= \frac{1,35}{4} \cdot (-1,72922 - 2,5152 - 2,37002) =$$

$$= -2,2324$$

Ошибка: $0,215 \sim 10^{-1}$

Модульная структура программы и контрольные тесты

Контрольные тесты

Вычисления происходили в цикле, согласно правилу Рунге. Вывод программы - файлы, для каждого выбранного порядка ϵ, содержащие в себе 4 столбца данных - результат интеграла на каждом шаге, длина отрезка разбиения, число итераций, число N.

Модульная структура программы

```
double f(double x);
```

- функция по варианту, (1)

```
double integrate_rec_l(double(*f)(double), int N, double a, double b);
```

- функция, реализующая метод левых прямоугольников. f - функция (1), N - число отрезков разбиения $[a; b]$

Численный анализ решения

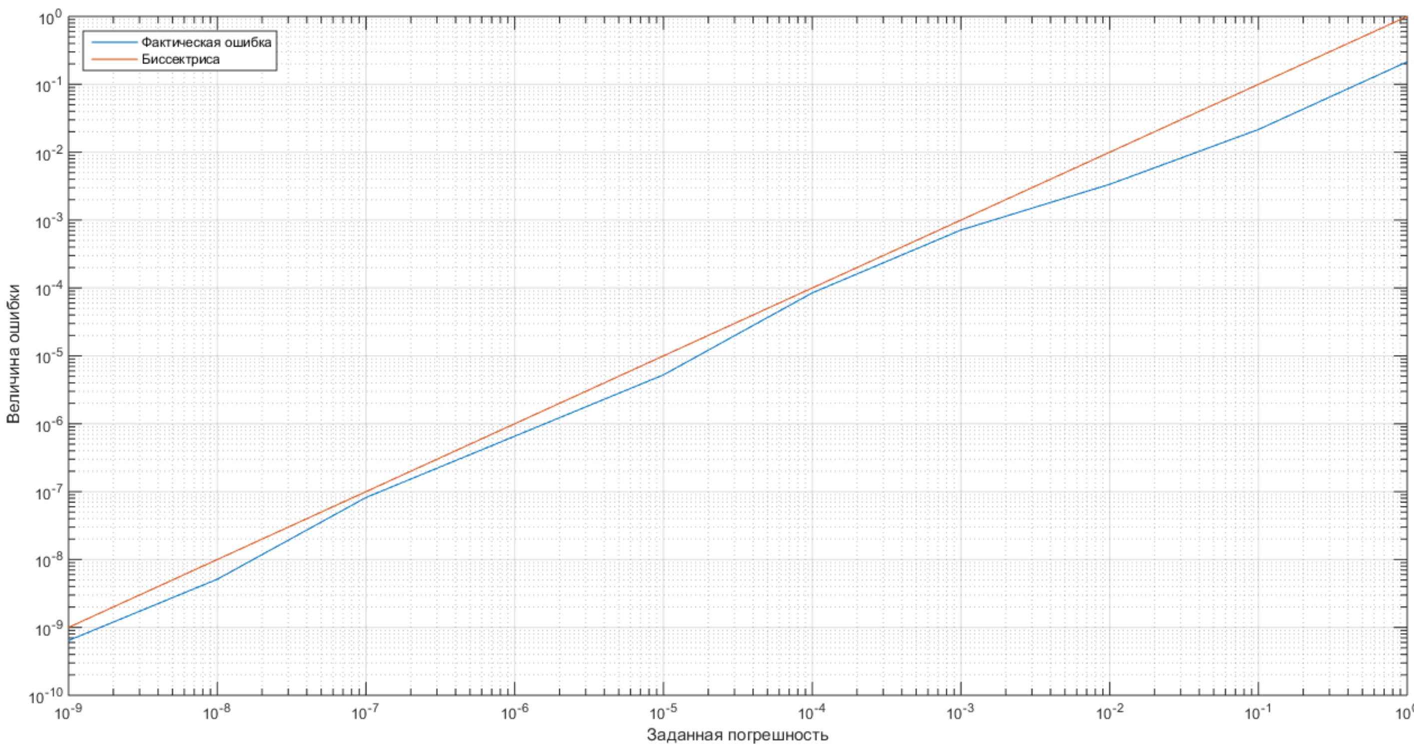

Рис. 1: Зависимость ошибки от заданной допустимой погрешности

На рис. 1 видно, что линия фактической ошибки лежит ниже биссектрисы.

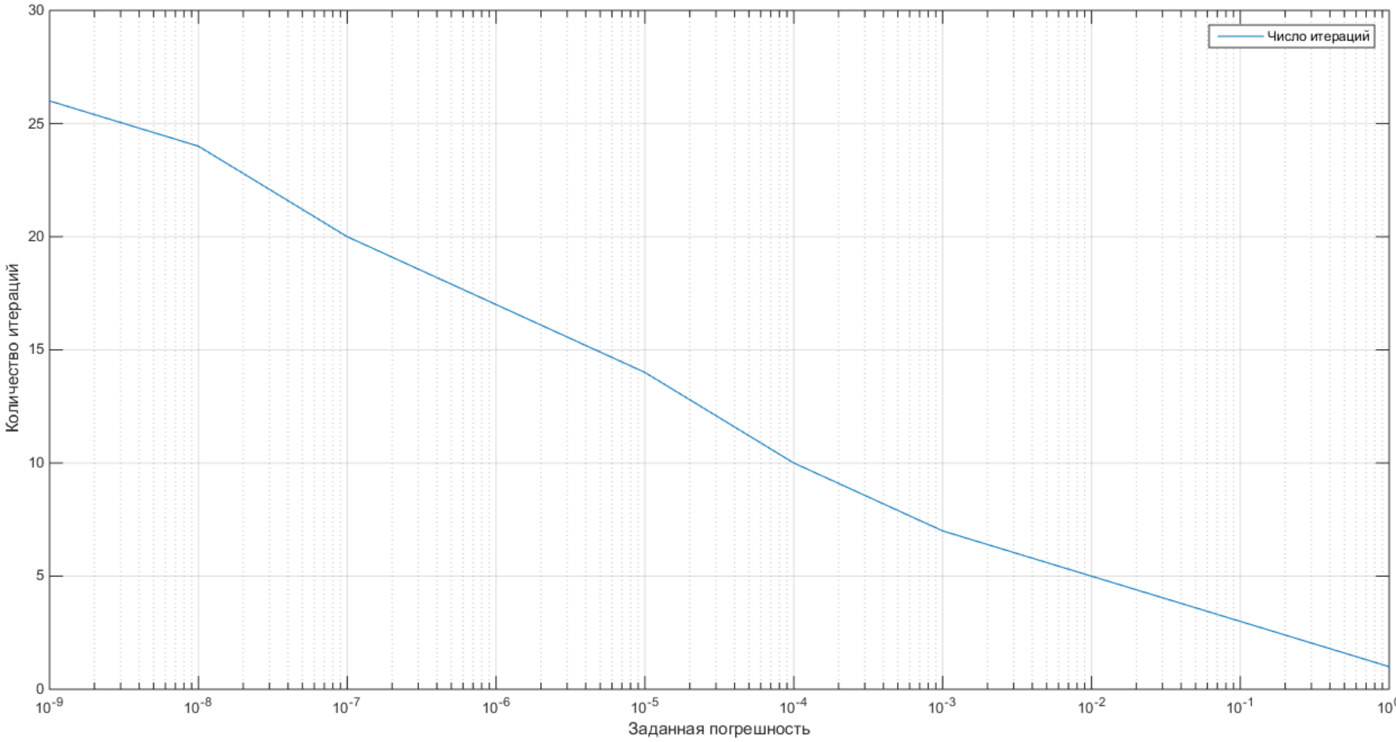

Рис. 2: Зависимость числа итераций от заданной погрешности

На рис. 2 видно, что число итераций с увеличением заданной погрешности убывает почти линейно.

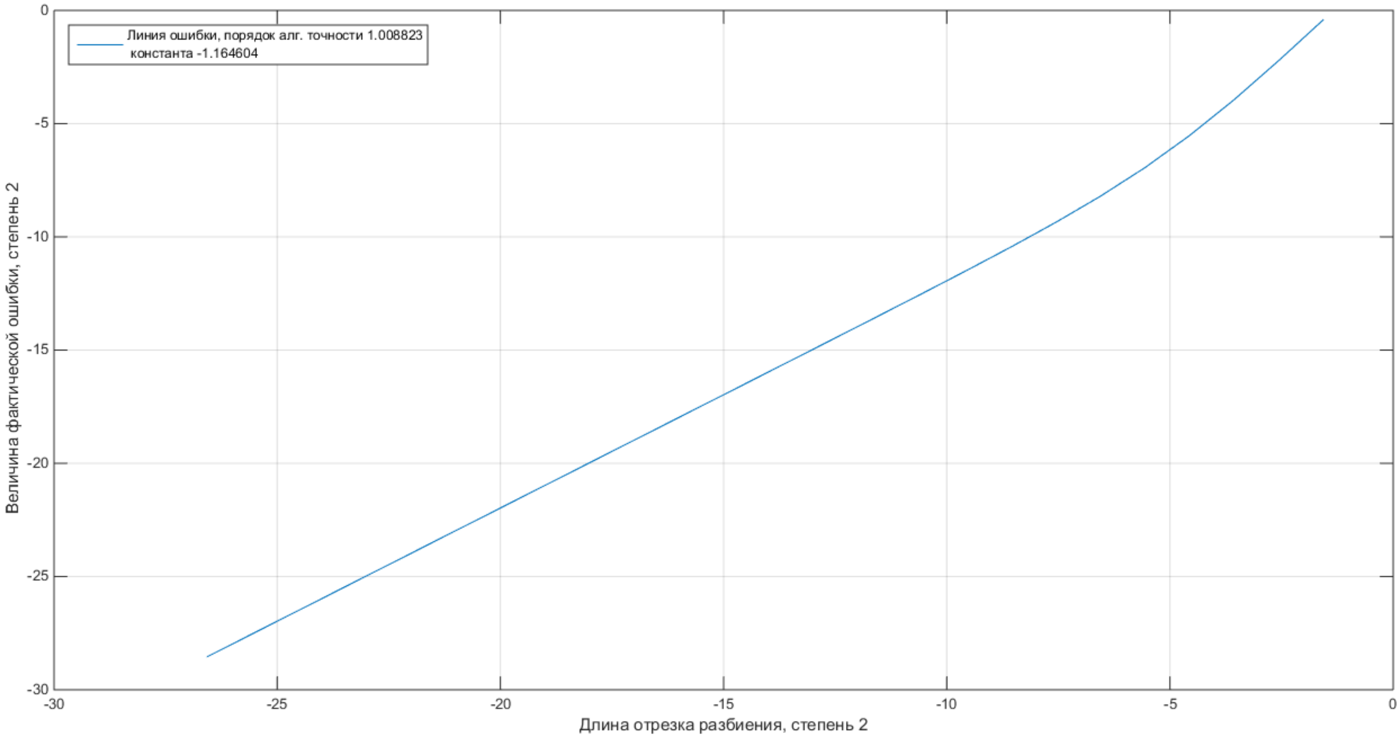

Рис. 3: Зависимость ошибки от длины отрезка разбиения

На рис. 3 видно, что с ростом заданной погрешности в 2 раза, ошибка также возрастает в 2 раза. Это подтверждает подробный анализ - коэффициент наклона линии равен 1.008 $\sim$ 1. Константа графика примерно равна -1.165.

Дополнительное задание: построение линий теор. ошибок

Для одного отрезка имеем формулу:

$$R^L = f'(\xi)\frac{(b-a)^2}{2}$$

Тогда, для N отрезков разбиения отрезка $[a; b]$:

$$R^L = f'(\xi)\frac{(b-a)^2}{2N}$$

Для отыскания максимальной теор. ошибки выберу такое ξ, что $f'(\xi)$ - максимально по модулю, для минимальной теор. ошибки поступлю аналогично.

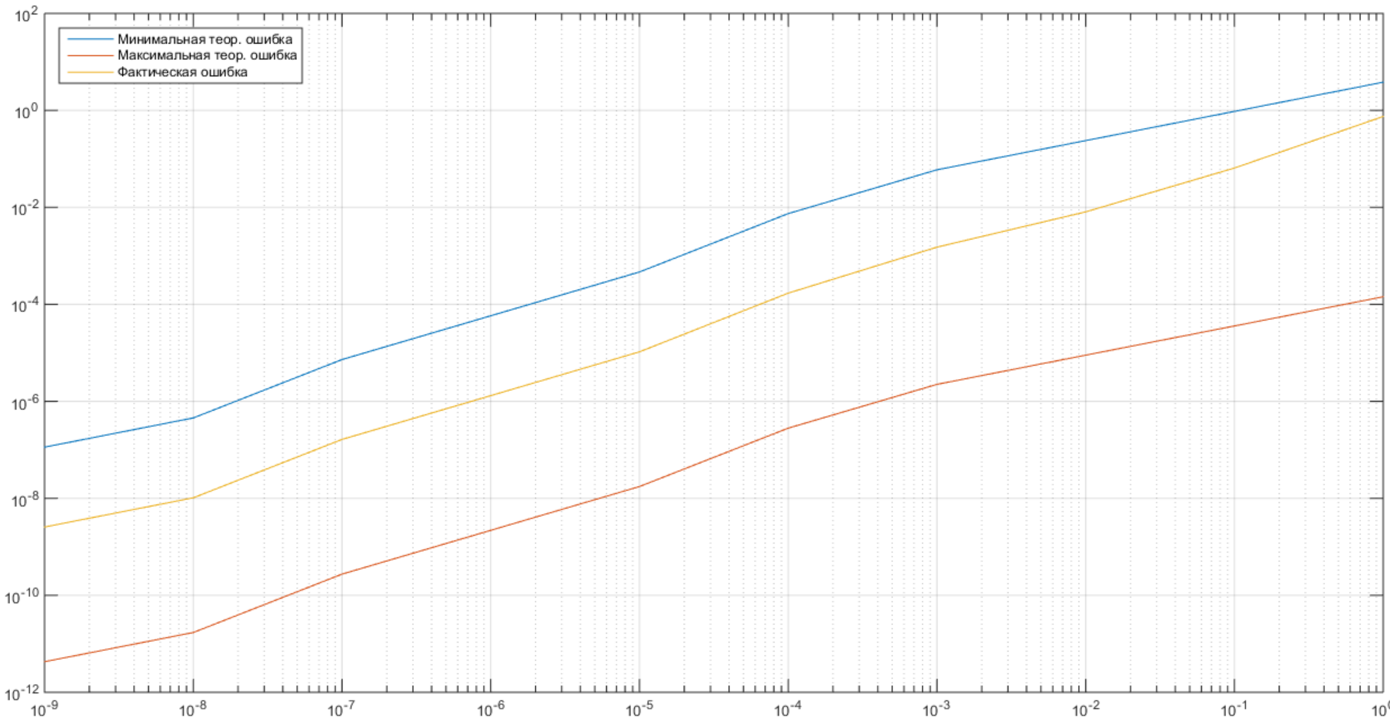

Рис. 4: Графики фактической ошибки, теор. максимальной и минимальной ошибки

Выводы

1. Ошибка вычисления интеграла методом левых прямоугольников линейно зависит от заданной погрешности(при условии использования правила Рунге), а также от длины отрезка разбиения.

2. Рис. 2 дает возможность определить более выгодные параметры для использования метода.

3. Нахождение графика фактической ошибки между графиками максимальной и минимальной теор. ошибки на рис. 4 говорит о корректной работе метода.