Построение кв. формулы для $n=3$

Для ф-лы Чебышева:

$$A = A_1 = A_2 = A_3$$

Опред. система:

$$\begin{cases} 3A = \int_{-1}^{1} 1\,dx, \\ A(x_1 + x_2 + x_3) = \int_{-1}^{1} x\,dx, \\ A(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \int_{-1}^{1} x^2\,dx, \\ A(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = \int_{-1}^{1} x^3\,dx. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{3}, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0. \end{cases}$$

Решение симметрической системы нелин. уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=1, \\ x^3+y^3+z^3=0. \end{cases}$$

Заключается в следующей замене

$$\begin{cases} x+y+z=u \\ xy+yz+zx=v \\ xyz=w \end{cases}$$

1) $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 = u^2-2v$

2) $(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+$

$(1)\begin{pmatrix} +3x^2y+3x^2z+3xy^2+ \\ +3xz^2+3y^2z+3yz^2+ \end{pmatrix}$

$+6xyz =$

$= \Big[(1) = (x+y+z)(zx+zy+xy) - 3w = uv-3w$

$\Rightarrow x^3+y^3+z^3 = u^3-uv+3w-6w$

Подставляю:

$$\begin{cases} u = 0, \\ u^2 - 2v = 1, \\ u^3 - uv - 3w = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 0, \\ v = -\frac{1}{2}, \\ w = 0. \end{cases}$$

Обратная подстановка

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ xy + xz + zy = -\frac{1}{2}, \\ xyz = 0. \end{cases}$$

Пусть $x = 0$, тогда $\begin{cases} y = -z, \\ zy = -\frac{1}{2}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = -z, \\ z^2 = \frac{1}{2}, \end{cases}$

$$\begin{cases} y = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Откуда: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

~~Кв. ф-ла примет след. вид~~:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{2}{3}\left(f(0) + f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

Полученные точки соответствуют точкам, указанным на стр. 493, Табл. 12.3 учебника Вержбицкого.