Санкт-Петербургский Политехнический Университет
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Отчет по лабораторной работе № 13
"Решение задачи Коши для ОДУ 1 порядка методами Адамса"
дисциплина "Численные методы"

Выполнил студент гр. 5030102/20003 Ляпустин Е.О.
Преподаватель Козлов К.Н.

Май, 2024

Формулировка задачи и ее формализация

Формализация задачи:

Найти решение ОДУ первого порядка методом (интерполяционным) Адамса-Моултона 3 порядка. Также найти решение заданой точности с помощью правила Рунге.

Поставленные задачи:

1. Иллюстрация работы метода. Построить графики точного и численных решений для двух фиксированных значений шага на отрезке. Построить график ошибки на отрезке для этих решений.
2. Исследование точности метода. Заданная точность достигается по правилу Рунге на каждом шаге. Построить график изменения шага по отрезку. Построить график зависимости фактической погрешности от заданной точности.
3. Исследование сходимости метода. Построить зависимость фактической ошибки от фиксированного шага интегрирования, использовать логарифмическую шкалу по основанию 2. Оценить порядок метода. График дополнить линией h^p, где p – порядок метода, вычислить константу.

Также, вариант подразумевает выполнение следующего доп. задания:

Внести погрешность 1%, 2%, 3%, 4%, 5% в начальное условие. Требуется вычислить относительную ошибку для каждого значения максимального возмущения и построить график. Эксперимент выполняется 20 раз, строится график типа боксплот, по оси х среднее фактическое возмущение данных в эксперименте.

Алгоритм метода

Отрезок интегрирования $[a,b]$, ОДУ $y' = f(x,y)$

1. Строится равномерная сетка n узлов (x_i) с шагом $h = \frac{b-a}{n-1}$
2. Начальное условие $y(a) = y_0$ соответствует x_0 по таблице
3. Далее строится сетка для y:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(5f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 8f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1}))$$

Для достижения заданой точности использую правило Рунге:

1. Для начала шаг равен половине длины отрезка (n=3)
2. Если $|y_{2i+2}(\frac{h}{2}) - y_{i+1}(h)| > \epsilon$ то шаг уменьшается вдвое.
3. Иначе: перехожу к следующему элементу сетки (i+=1)

Предварительный анализ задачи

ОДУ по варианту: $x^2y' + xy + 1 = 0$; a = 1, b = 3
Явное выражение:

$$y' = -\frac{1 - xy}{x^2} \tag{1}$$

Задача Коши:

$$y(a) = 1 \tag{2}$$

Точное решение:

$$xy = 1 - \ln(|x|) \tag{3}$$

Ручной расчет

Ручной расчет добавлен в репозиторий отдельным файлом (pp.pdf)

Модульная структура программы и контрольные тесты

Модульная структура программы

```
double f(double x, double y);
```

- явная запись ОДУ по варианту, (1)

```
double* f_eq_form(double x);
```

- явная запись ОДУ по варианту, (1) в форме массива (для решения уравнения, тк метод неявный)

```
double* adams_moulten(double* start_points, double a, double b,
        double(*f)(double, double), int n);
```

- реализация метода Адамса-Моултона 3 порядка, start_points - массив из двух разгонных точек; y0 - начальное условие (2);a, b - отрезок интегрирования; n - число узлов в сетке

```
double* create_grid_even(int n, double a, double b);
```

- функция, возвращающая равномерное разбиение отрезка $[a, b]$ (сетка x_i) на n узлов

```
double** runge_adams(double eps, double y0, double a, double b,
        double(*f)(double, double), int* n_, int* len_h);
```

- реализация правила Рунге для достижения заданой точности ϵ, n_ - ссылка на число, по ней подставляется значение длины массива ответа (x,y,h), len_h - ссылка на число, по ней подставляется длина массива с задействованными в итерировании шагами h.

```
double uglify_initial(double initial,
    int max_procent,int min_procent);
```

- функция, реализующая случайное изменение начального условия initial (2) в диапазоне [max_procent,min_procent]

Численный анализ решения

Иллюстрация работы метода

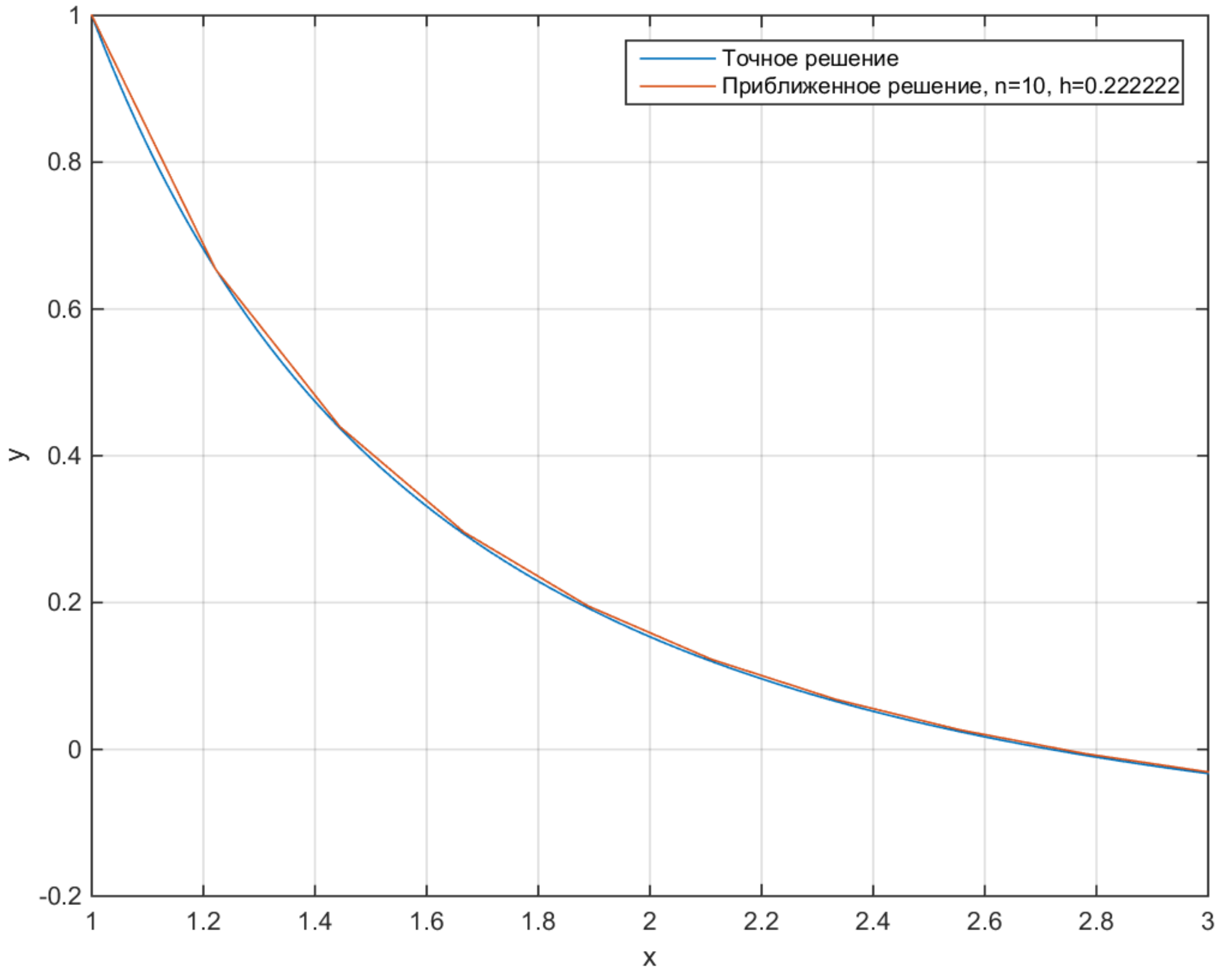

Рис. 1: Графики точного и приближенного решений (n=10)

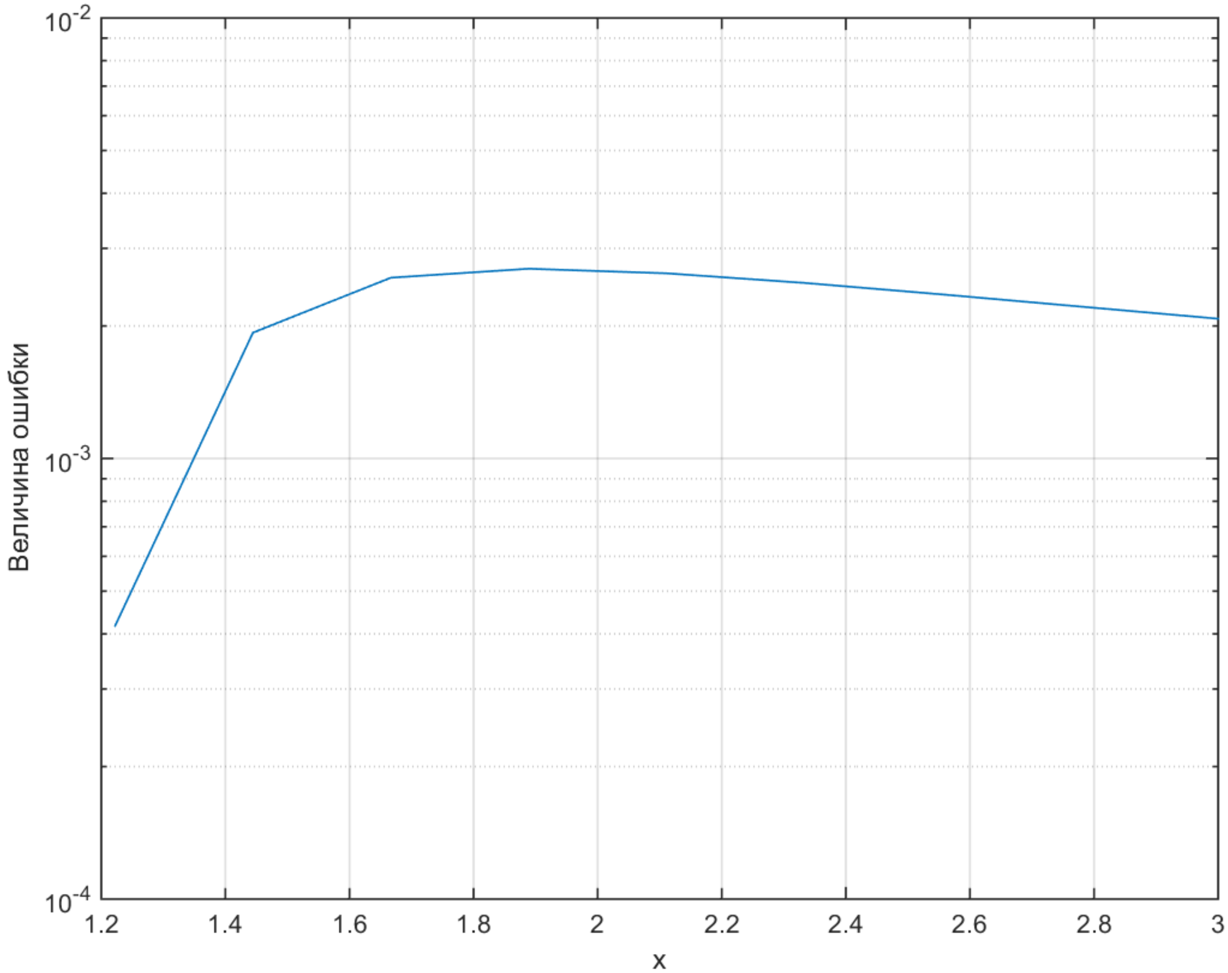

Рис. 2: График поточечной ошибки (n=10)

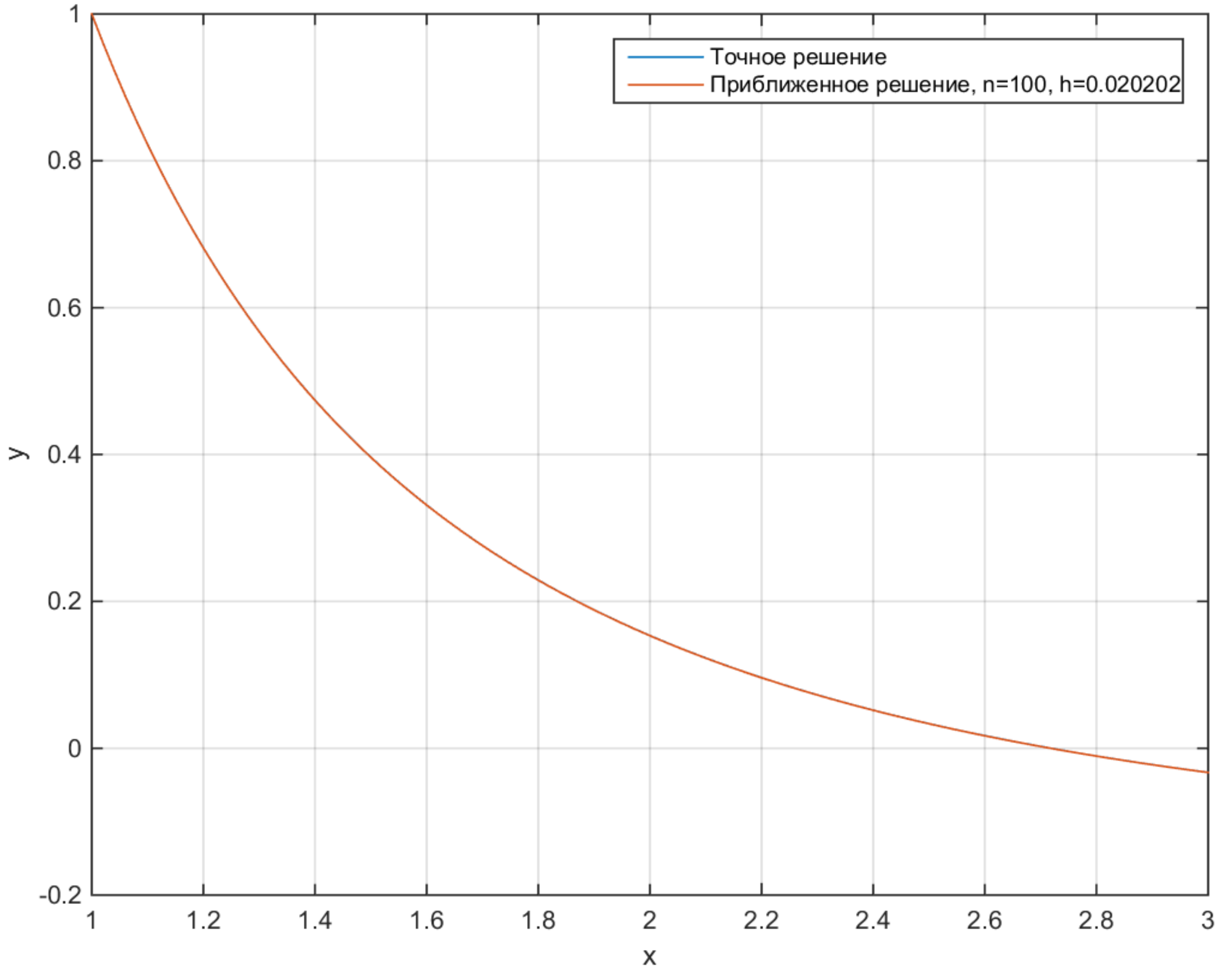

Рис. 3: Графики точного и приближенного решений (n=100)

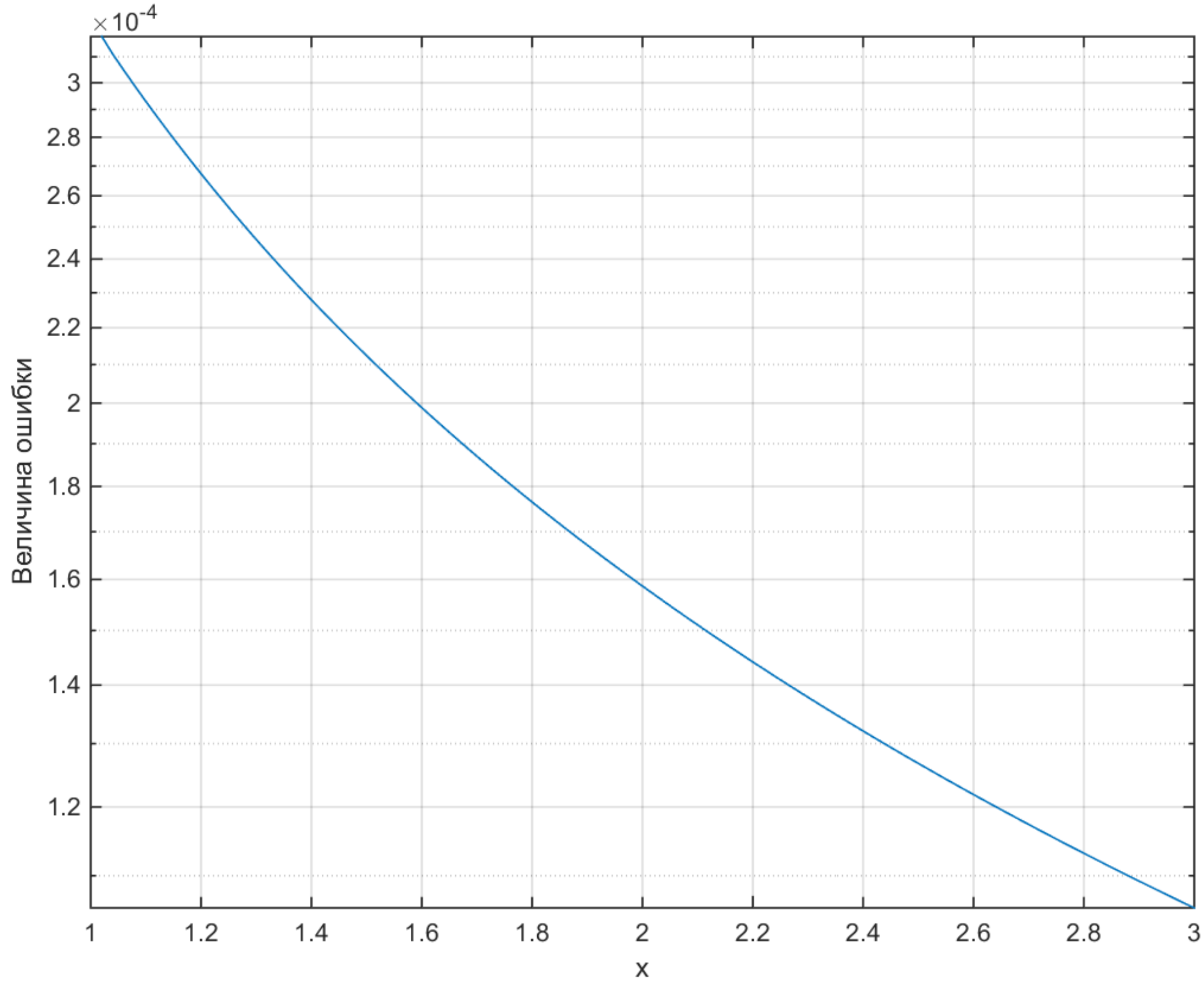

Рис. 4: График поточечной ошибки (n=100)

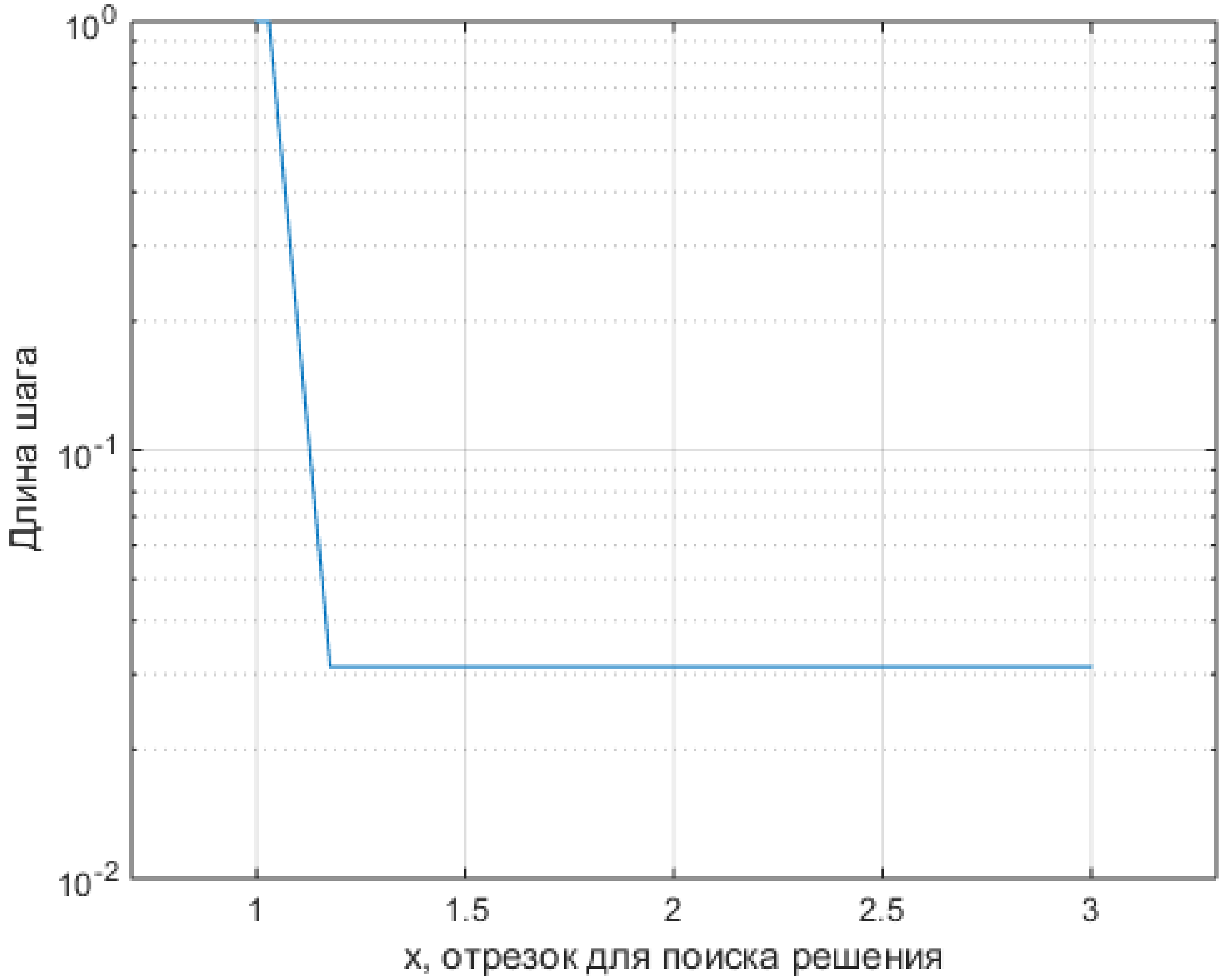

Рис. 5: График изменения шага по отрезку поиска решений при заданной точности 10^{-3}

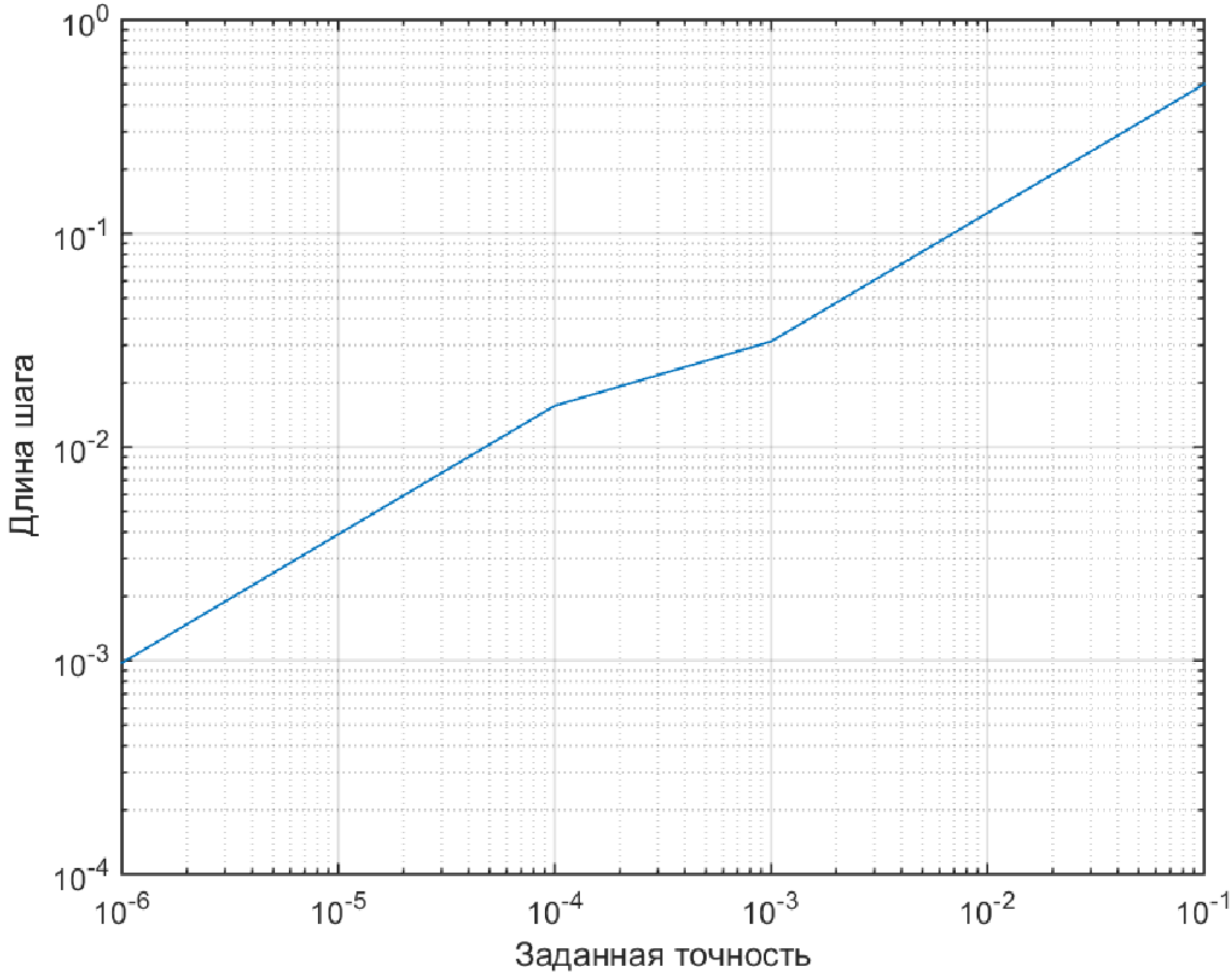

Рис. 6: График зависимости длины шага разбиения от заданой точности

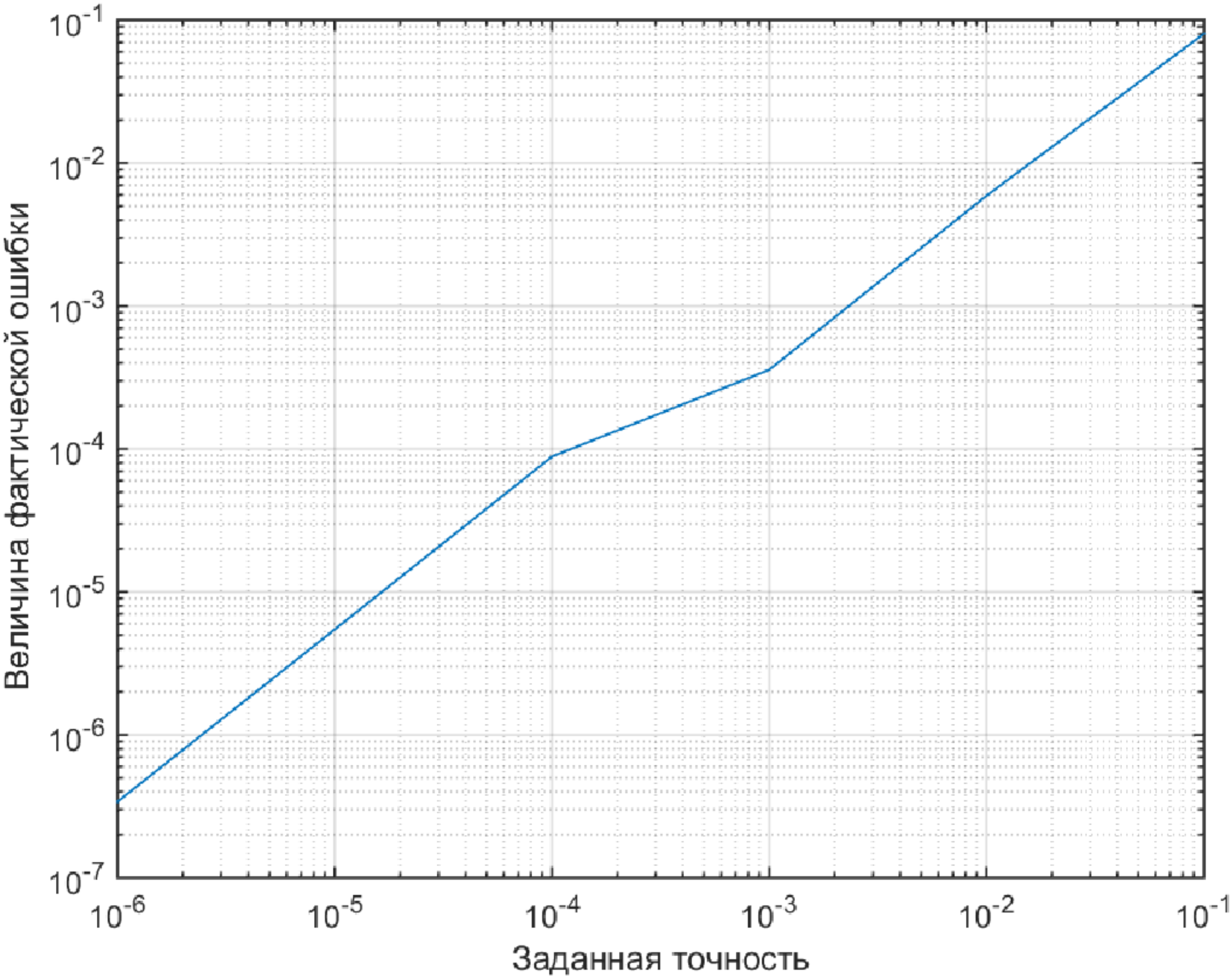

Рис. 7: График зависимости фактической ошибки от заданой точности

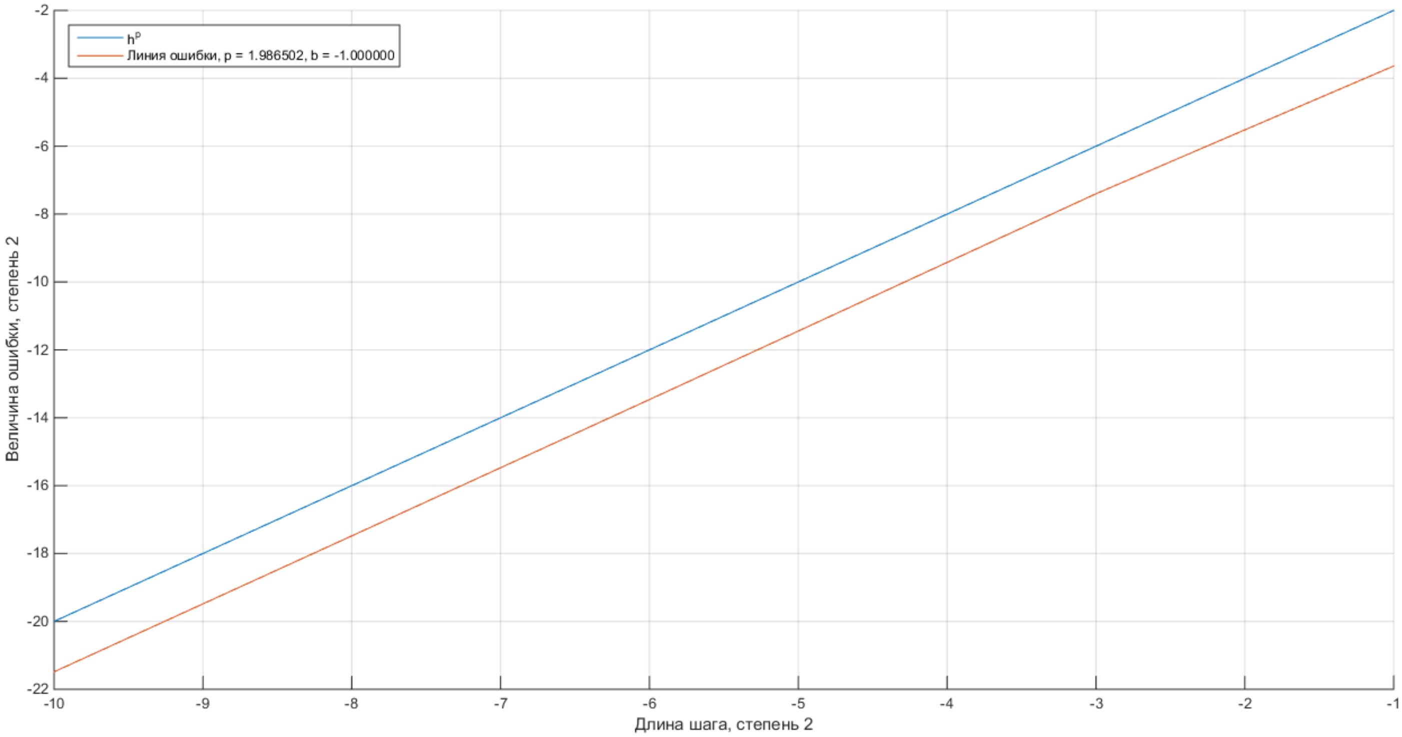

Рис. 8: Зависимость фактической ошибки от фиксированного шага интегрирования

Здесь порядок метода p равен 1.98650, константа b равна -1

Дополнительное задание

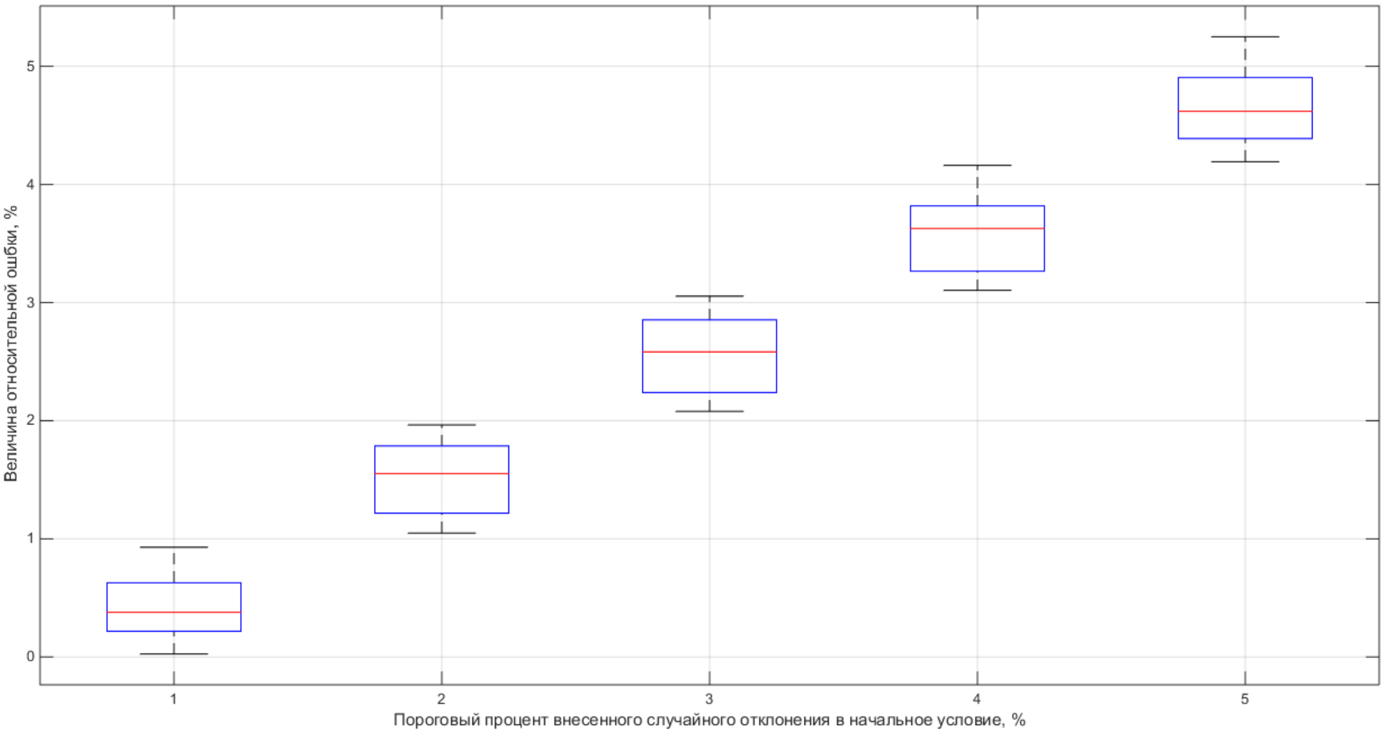

Рис. 9: График, показывающий зависимость изменения относительной погрешности в зависимости от внесенной в начальное условие погрешности

Выводы

1. Из рис. 7 видно, что фактическая ошибка соответствует заданной точности

2. Из рис. 8: с уменьшением шага в 2 раза, фактическая ошибка уменьшается примерно в 4 раза, $p \approx 2$ (что соответствует ожидаемому результату: $r=m$ (алгебраическая точность равна шаговости метода, для интерполяционных методов Адамса-Моултона))

3. Из рис. 9 видно, что с увеличением неточности в начальном условии задачи на k% ожидается в среднем менее чем k% относительной ошибки.

4. Сравнение метода Эйлера и метода Адамса-Моултона 3 порядка приводит к следующему выводу: первый метод более затратный, но вычисления тривиальны - каждая новая точка вычисляется из предыдущей, второй метод несет меньше затрат на вычисления, однако, вычисления сложны исходя из двух пунктов: метод двухшаговый и метод неявный.