Санкт-Петербургский Политехнический Университет
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Отчет по лабораторной работе № 9
"Приближение табличных функций сплайнами и МНК"
дисциплина "Численные методы"

Выполнил студент гр. 5030102/20003 Ляпустин Е.О.
Преподаватель Козлов К.Н.

Март, 2024

Формулировка задачи и ее формализация

Приближение табличной функции методом наименьших квадратов

Формализация задачи:

Реализовать МНК для системы алгебраических полиномов, проанализировать его работу

Поставленные задачи:

1. Реализовать алгоритм метода
2. Ручной расчет тестового примера сделать для полинома 2 порядка и 5 узлов. Вычислить максимальную ошибку – разность между значением функции и полинома в узлах и серединах между узлами.
3. Иллюстрация работы метода. Построить полиномы 1, 2 и 3 порядков по методу наименьших квадратов для выбранного числа узлов, 100..200. Построить график функции и полиномов, отметить узлы. Вычислить ошибку в узлах и в серединах между узлами. Построить график ошибки для этих полиномов.
4. Исследование зависимости максимальной ошибки от числа узлов для полинома 3 степени, число узлов 10..1000.
5. Исследование зависимости максимальной ошибки от степени полинома, 2..10, для выранного числа узлов, 100..200.

Также, вариант подразумевает выполнение следующего доп. задания:

Исследование влияния весов. Ввести вес для каждой точки данных, сумма весов равна 1. Построить график функции и полиномов 1, 2 и 3 порядков для разного значения веса у одной выбранной точки. Построить график зависимости ошибки в этой точке и максимальной ошибки при изменении веса, для полинома 2 порядка

Алгоритм метода и условия применимости

Основная задача МНК - отыскание коэффициентов полинома. Данные коэффициенты - есть решение СЛАУ, которая задается следующей формулой:

$$\sum_{j=0}^{m}(\phi_j^h, \phi_k^h)a_j = (y^h, \phi_k^h), k = 0, ..., m$$

где a_j - есть искомые коэфициенты,

$$\phi(x_i) = \sum_{j=0}^{m} a_j * \phi_j(x_i)$$

$$\phi_k^h = \{\phi_k(x_i)\}_{i=0}^n$$
$$\phi_k(x_i) = x_i^k$$

Предварительный анализ задачи

Вариант включает в себя приближение МНК двух следующих функций:

$$x^2 - \sqrt{\log_{10}(x+3)} \tag{1}$$

$$x^3 - 0.2x^2 + 0.4|x| + 1.4 \tag{2}$$

Для аппроксимации функции (1) выбран отрезок $[-2; 4]$. Для функции (2) - $[0; 5]$ (выбор интервалов непрерывности)

Ручной расчет

$f(x) = x^2 - \sqrt{\log_{10}(x+3)}$

$[a, b] = [-2, 4]$, $n = 4$

$xh = \{-2; -0,5; 1; 2,5; 4\}$

$yh = \{4; -0,38; 0,22; 5,39; 15,08\}$

$p = \{1; 1; 1; 1; 1\}$ - веса узлов

$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$\varphi_0(x) = 1$ $\qquad \varphi_j^h = \{\varphi_j(x_i)\}_{i=0}^{n=4}$

$\varphi_1(x) = x$ $\qquad y^h = yh = \{y_i\}_{i=0}^{n}$

$\varphi_2(x) = x^2$

$$\sum_{j=0}^{m=2} (\varphi_j^h, \varphi_k^h) a_j = (y^h, \varphi_k^h), \quad k = 0, 1, 2$$

$$(\varphi_j^h, \varphi_k^h) = \sum_{i=0}^{n} x_i^j \cdot x_i^k = \sum_{i=0}^{n} x_i^{j+k}$$

Получена СЛАУ:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=0}^{4} 1\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{4} x_i\right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^{4} x_i^2\right) a_2 = \sum_{i=0}^{4} y_i, \\ \left(\sum_{i=0}^{4} x_i\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{4} x_i^2\right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^{4} x_i^3\right) a_2 = \sum_{i=0}^{4} y_i x_i, \\ \left(\sum_{i=0}^{4} x_i^2\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{4} x_i^3\right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^{4} x_i^4\right) a_2 = \sum_{i=0}^{4} y_i x_i^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a_0 + 5a_1 + 27{,}5a_2 = 24{,}31 \\ 5a_0 + 27{,}5a_1 + 72{,}5a_2 = 66{,}21 \\ 27{,}5a_0 + 72{,}5a_1 + 312{,}13a_2 = 291{,}1 \end{cases}$$

$a_0 = -0{,}63$

$a_1 = -0{,}21$

$a_2 = 1{,}03$

$\varphi(x) = 1{,}03x^2 + (-0{,}21)x + (-0{,}63)$

$\varphi(x_0) = 3{,}91$ $\quad |\varphi(x_0) - y_0| = 0{,}08$

$\varphi(x_1) = -0{,}2675$ $\quad |\varphi(x_1) - y_1| = 0{,}11$

$\varphi(x_2) = 0{,}2$ $\quad |\varphi(x_2) - y_2| = 0{,}03$

$\varphi(x_3) = 5{,}28$ $\quad |\varphi(x_3) - y_3| = 0{,}11$

$\varphi(x_4) = 15{,}01$ $\quad |\varphi(x_4) - y_4| = 0{,}07$

$\varphi\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) = 1{,}24$ $\quad \left|\varphi\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) - f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)\right| = 0{,}17$

$\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = -0{,}62$ $\quad \left|\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right| = 0{,}03$

$\varphi\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right) = 2{,}16$ $\quad \left|\varphi\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right) - f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)\right| = 0{,}08$

$\varphi\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right) = 9{,}57$ $\quad \left|\varphi\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right) - f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)\right| = 0{,}1$

Модульная структура программы и контрольные тесты

Контрольные тесты

Для каждой функции строится (равномерная) сетка. Далее, для определенного числа узлов n вычисляются значения полинома в 10000 точках (построение проверочной сетки).

Модульная структура программы

```
double** generate_ugrid(double (*f)(double), int n,
double a, double b);
```

- построение равномерной сетки для переданной функции f, числа узлов n на отрезке $[a;b]$. Возвращает двумерный массив: в каждом подмассиве 2 элемента, на первой позиции - значение координаты x, на второй - y.

```
double f_smooth(double x);
double f_gap(double x);
```

- данные по варианту математические функции.

```
double* LDR_sol(double** A, double* left_v,int n);
```

- решение СЛАУ с главной матрицей A и свободным столбцом left_v, размерности n средствами LDR разложения

```
double* MLS_coef(double* xh, double* yh, double* p, int m, int n);
```

- реализация МНК. xh и yh - узлы сетки, p - вектор весов (по умолчанию вес каждого узла=1), m - число коэффициентов искомого полинома, n - число узлов. Возвращает массив коэффициентов искомого полинома

```
double MLS(double x, double* coefs, int m);
```

- функция, возвращающая значение полинома МНК степени m-1 с коэффициентами coefs в точке x.

```
double* change_p(int n, int d_change, int pos_change,int amount);
```

- функция, изменяющая весы узлов. n - число узлов, d_change - позиция узла в сетке для изменения, pos_change - позиция уровня изменения (от большего значения веса к меньшему, относительно amount), amount - мелкость распределения весов (вес меняется в диапазоне $[0,1)$)

Численный анализ решения

Функции и полиномы на одном графике. Графики поточечной ошибки

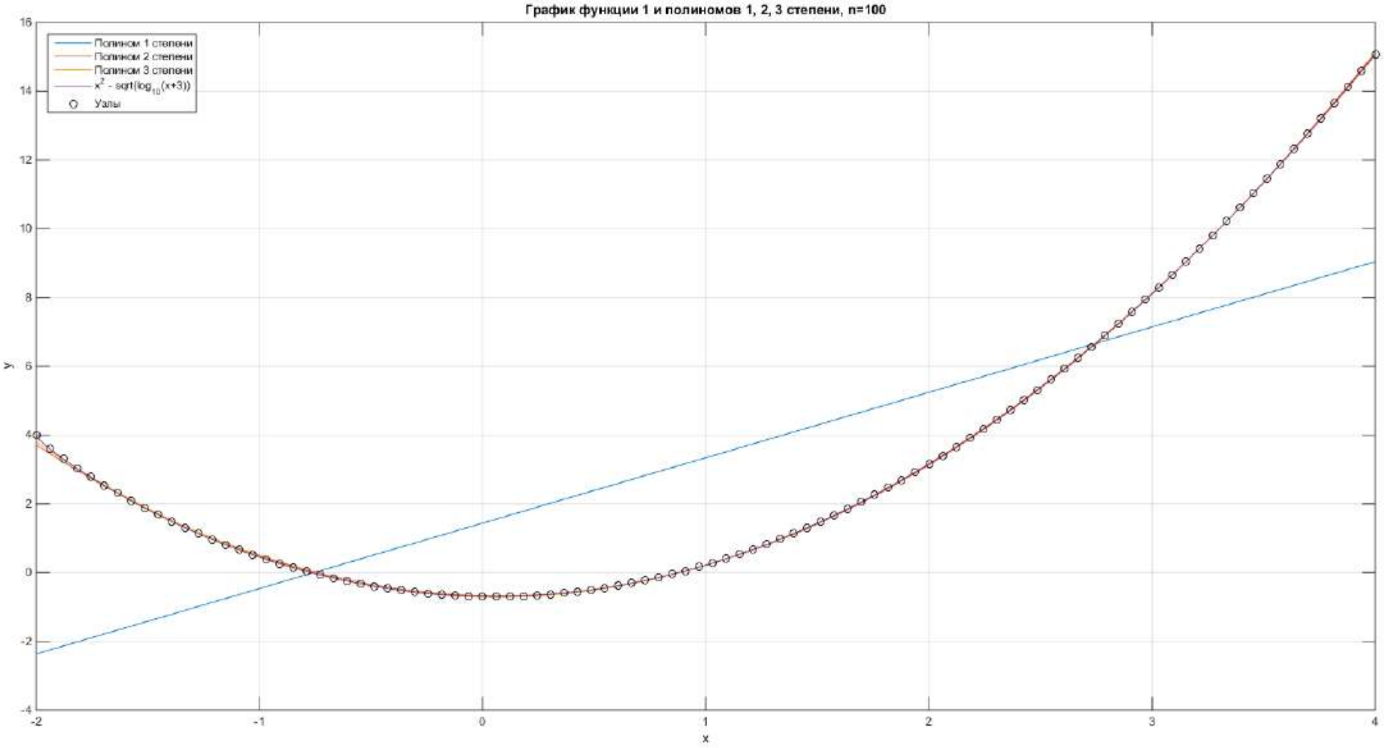

Рис. 1: График функции 1 и полиномов 1,2,3 степени, n=100

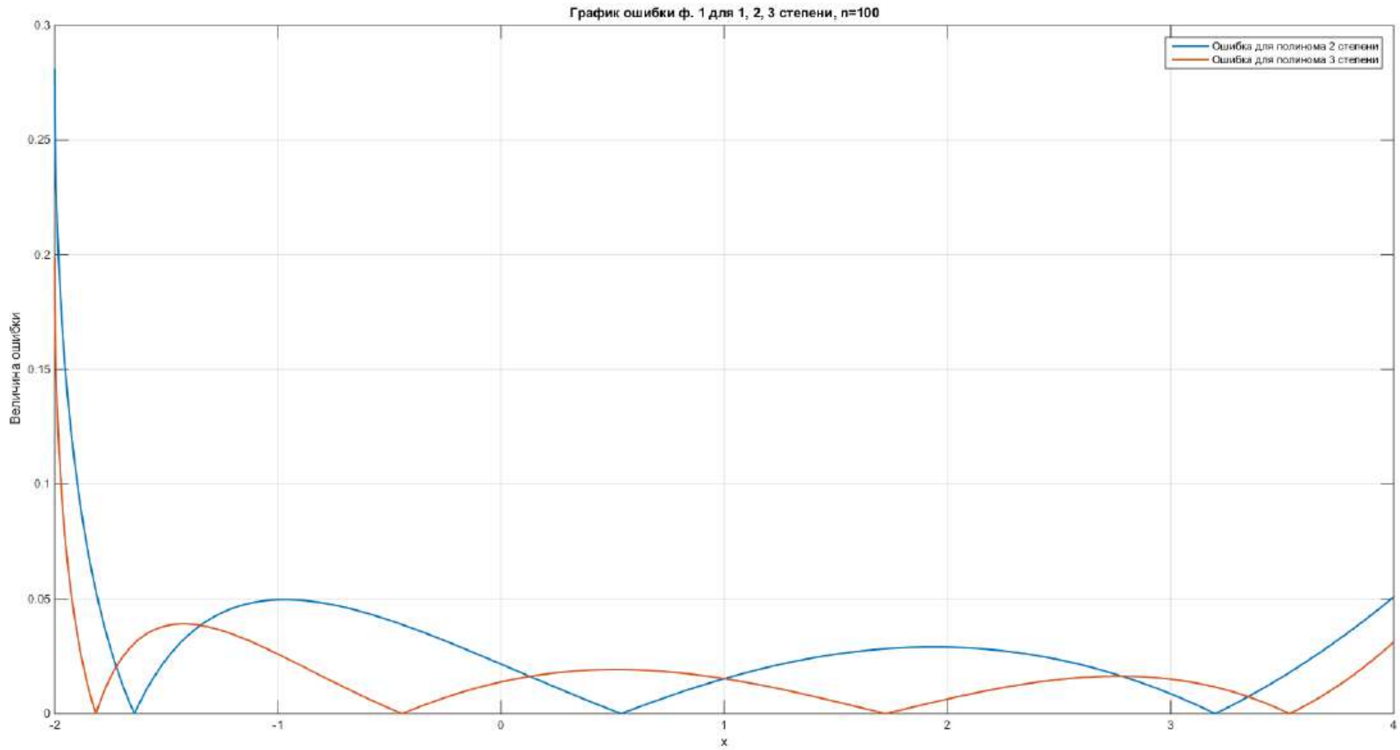

Рис. 2: График поточечной ошибки для функции 1 и полиномов 2,3 степени, n=100

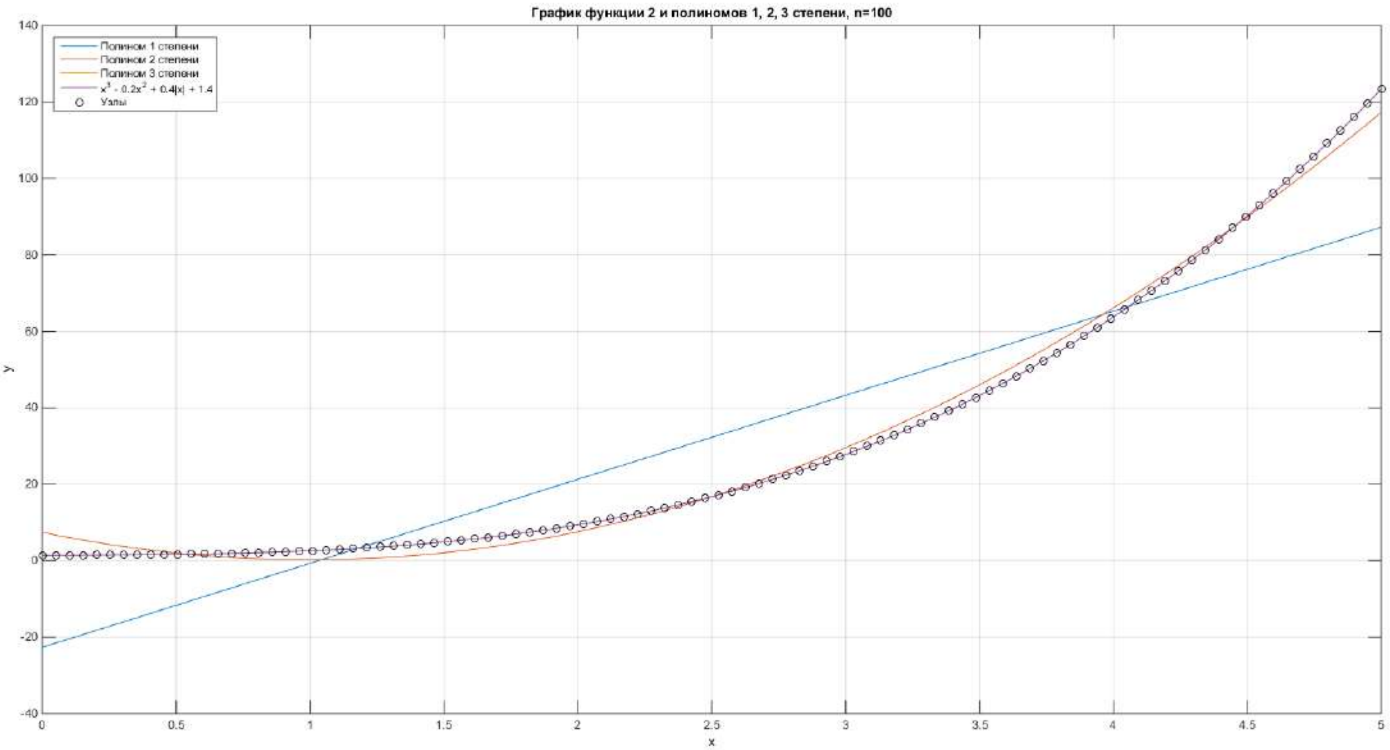

Рис. 3: График функции 2 и полиномов 1,2,3 степени, n=100

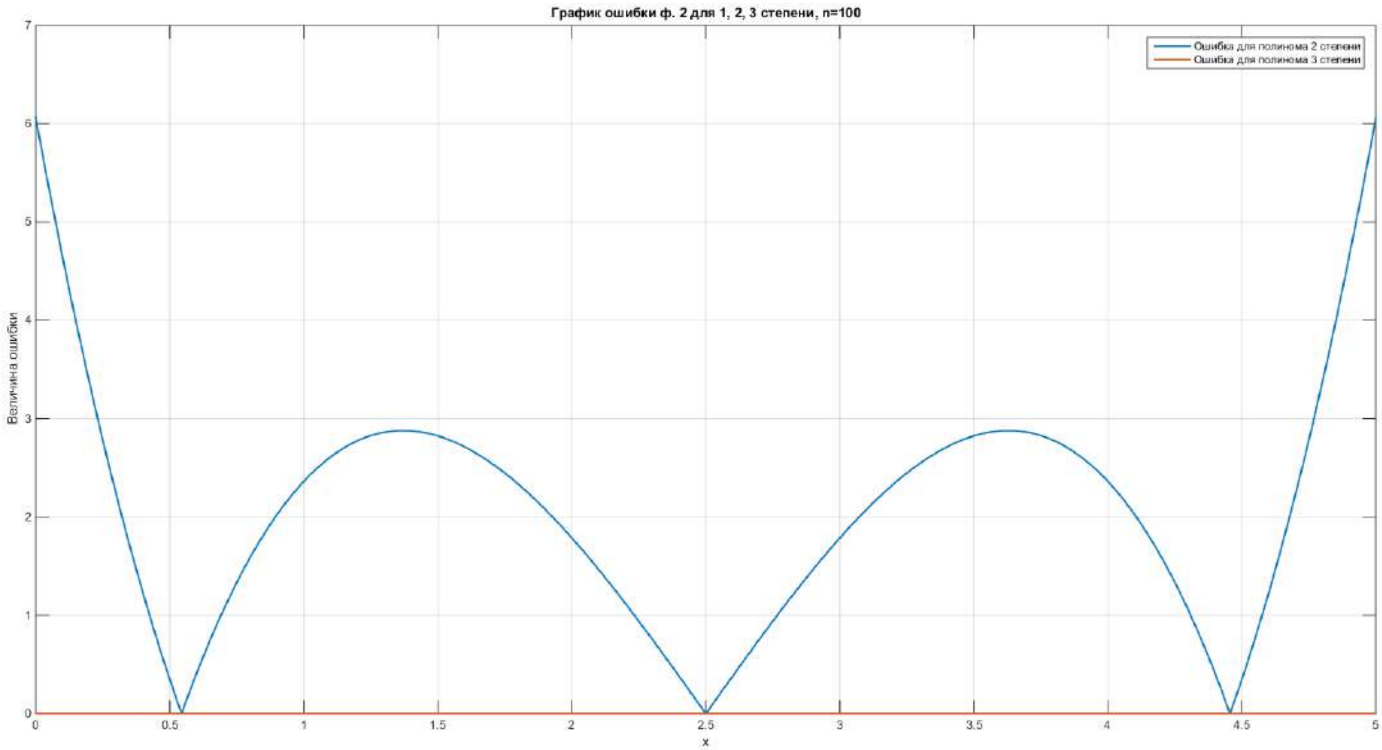

Рис. 4: График поточечной ошибки для функции 2 и полиномов 2,3 степени, n=100

На рисунке 1 видно, что графики полиномов практически совпадают с заданой функцией, что подверждает рисунок 2. Иная картина для функции 2: ошибка полинома второй степени велика, а третья степень полностью совпадает с функцией на отрезке (см. рисунок 4).

Зависимость максимальной ошибки от числа узлов

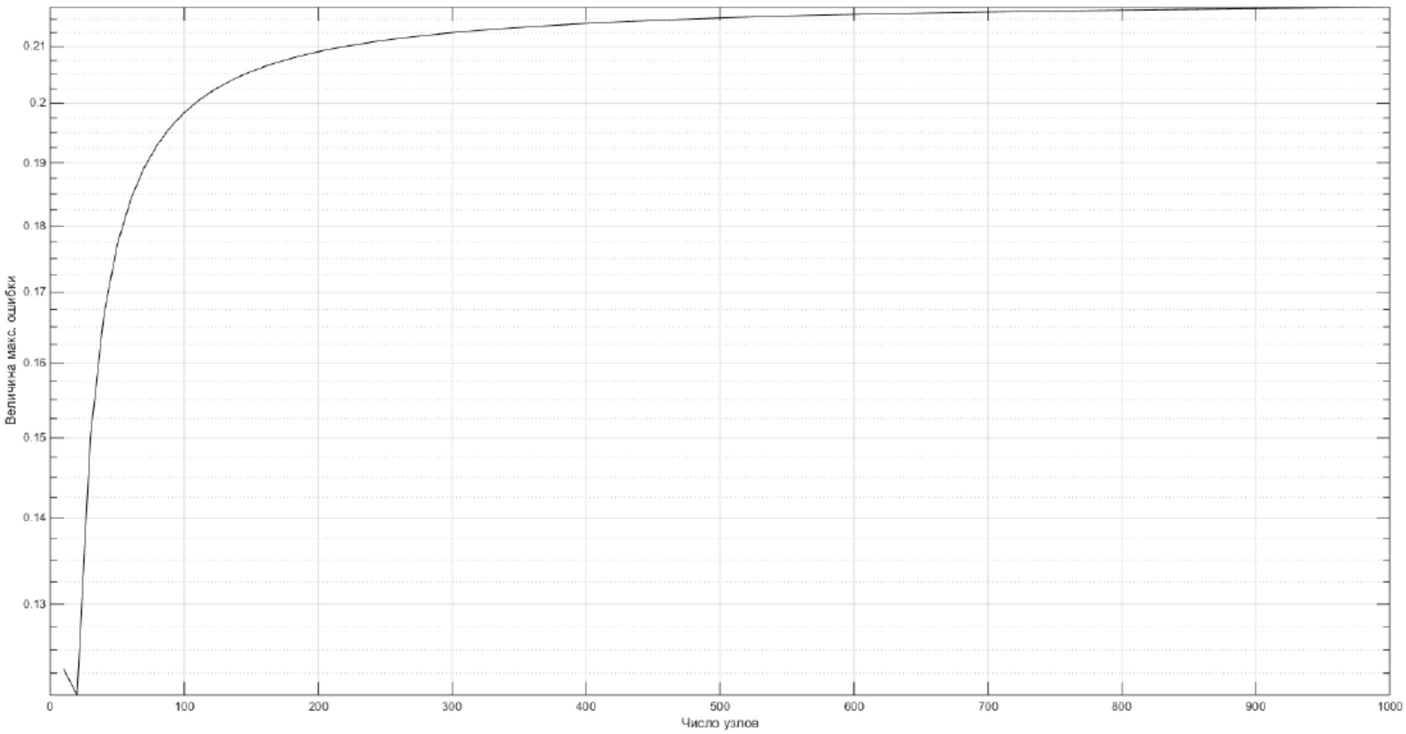

Рис. 5: График максимальной ошибки от числа узлов, функция 1

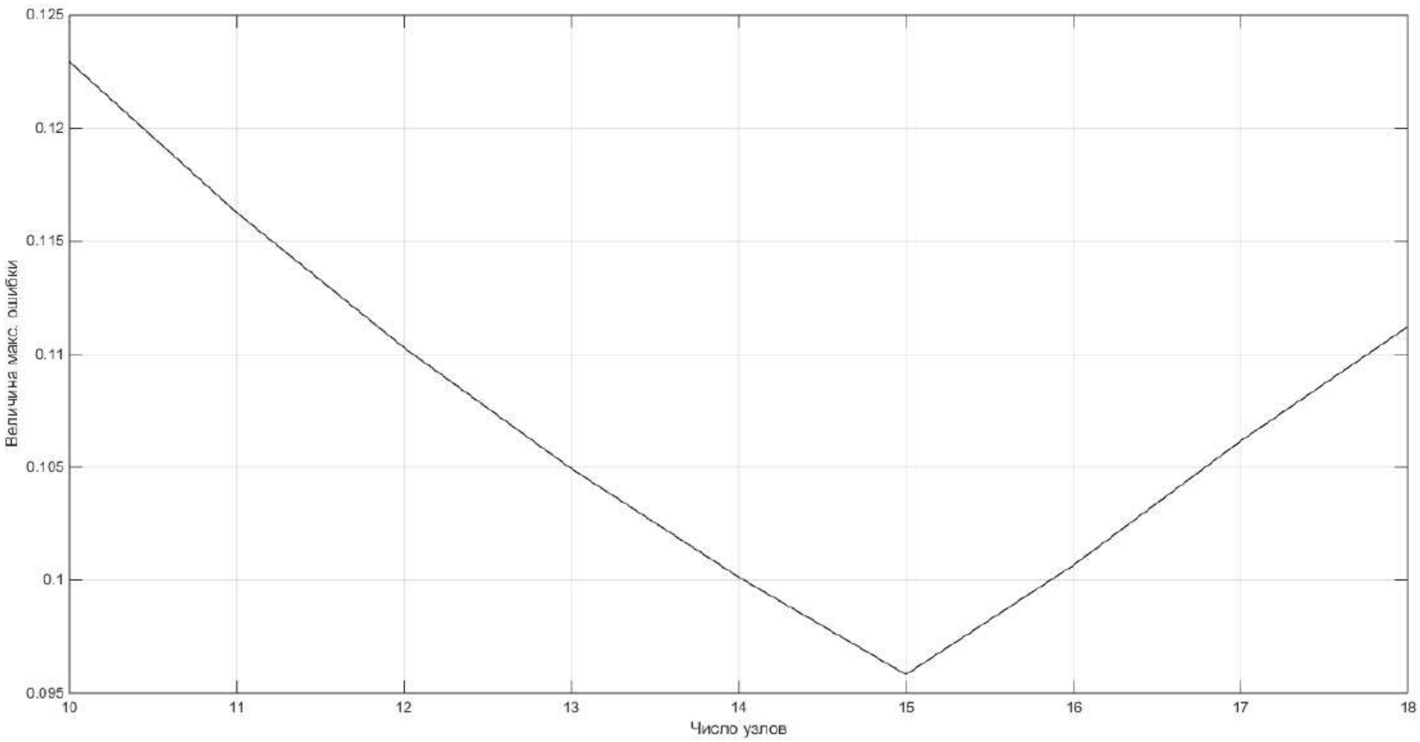

Рис. 6: График максимальной ошибки от числа узлов, рассмотрение ситуации с минимальным значением ошибки, функция 1

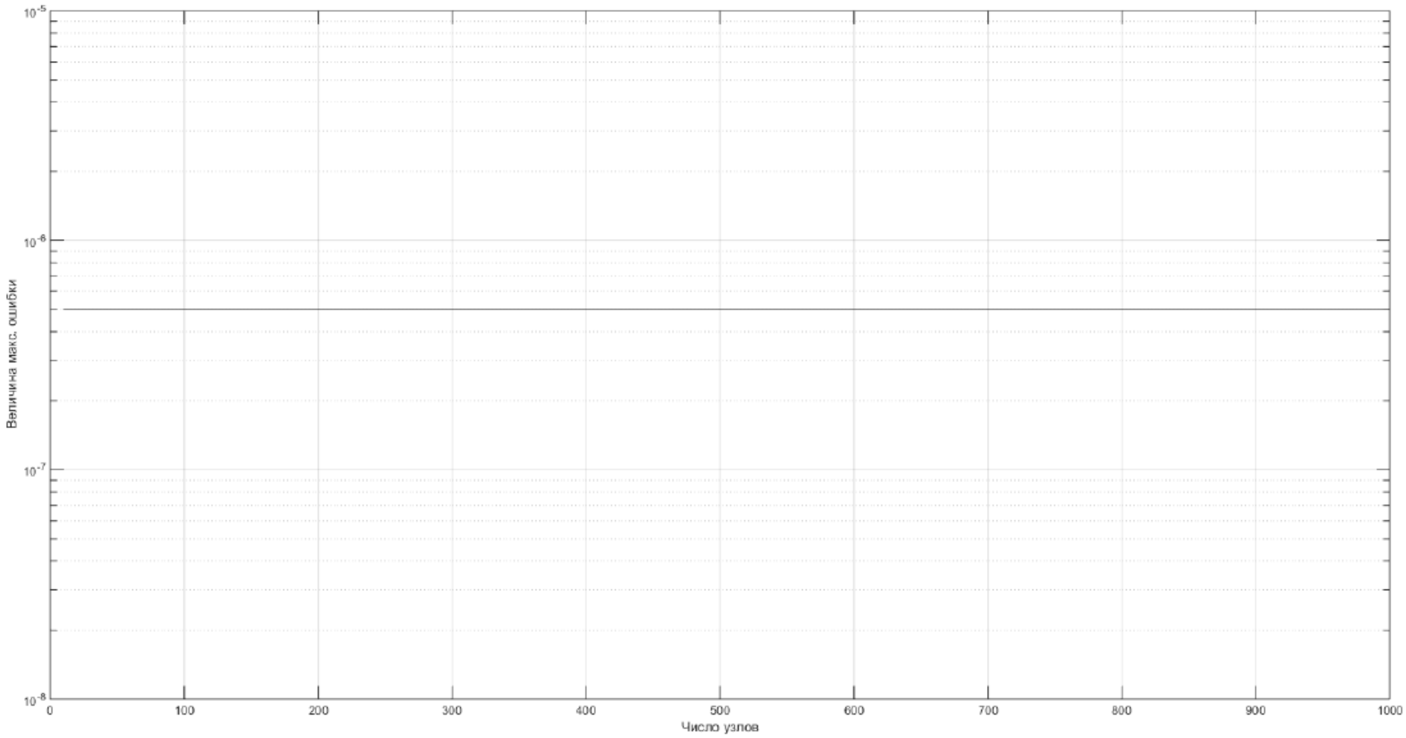

Рис. 7: График максимальной ошибки от числа узлов, функция 2

Рисунок 6 показывает, что с увеличением числа узлов возрастает ошибка. Рисунок 7 же показывает, что максимальная ошибка для функции 2 не зависит от числа узлов и близка к нулю.

Зависимость максимальной ошибки от степени полинома

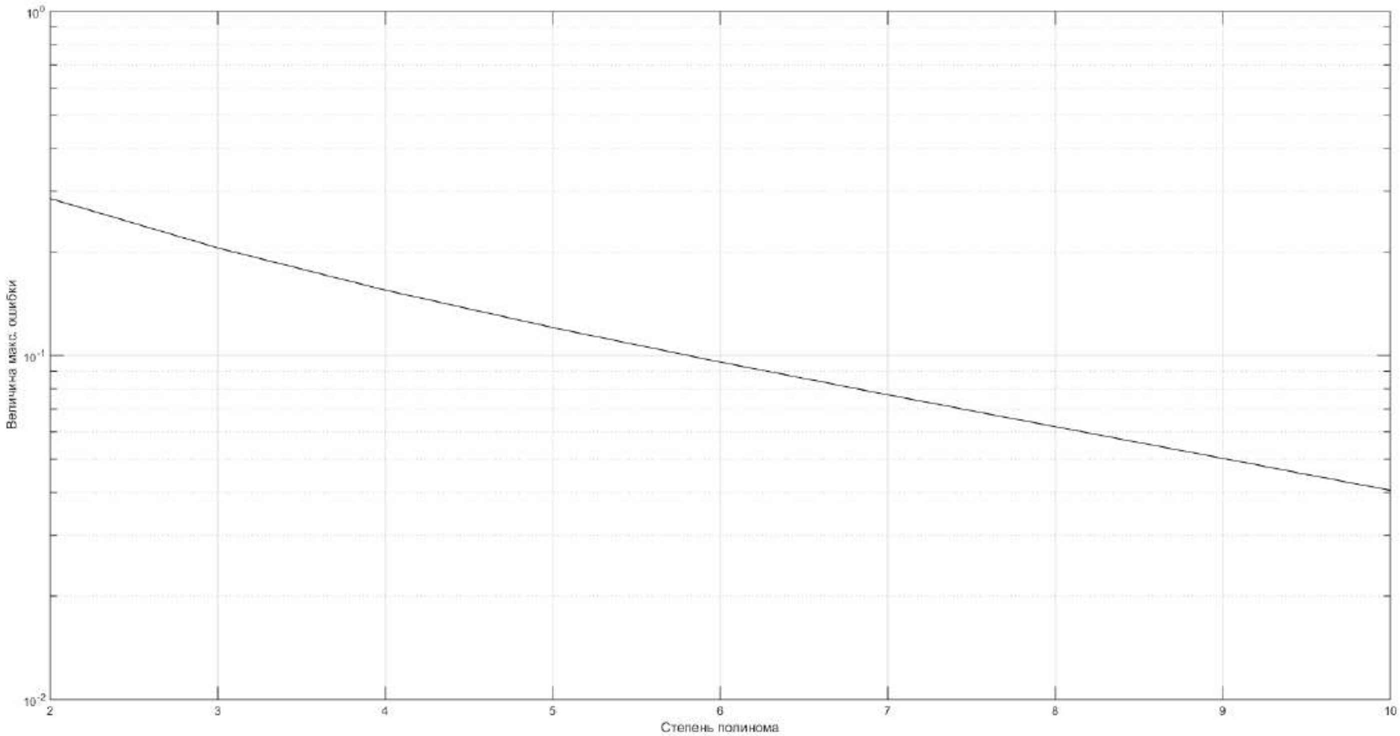

Рис. 8: График максимальной ошибки от степени полинома, функция 1

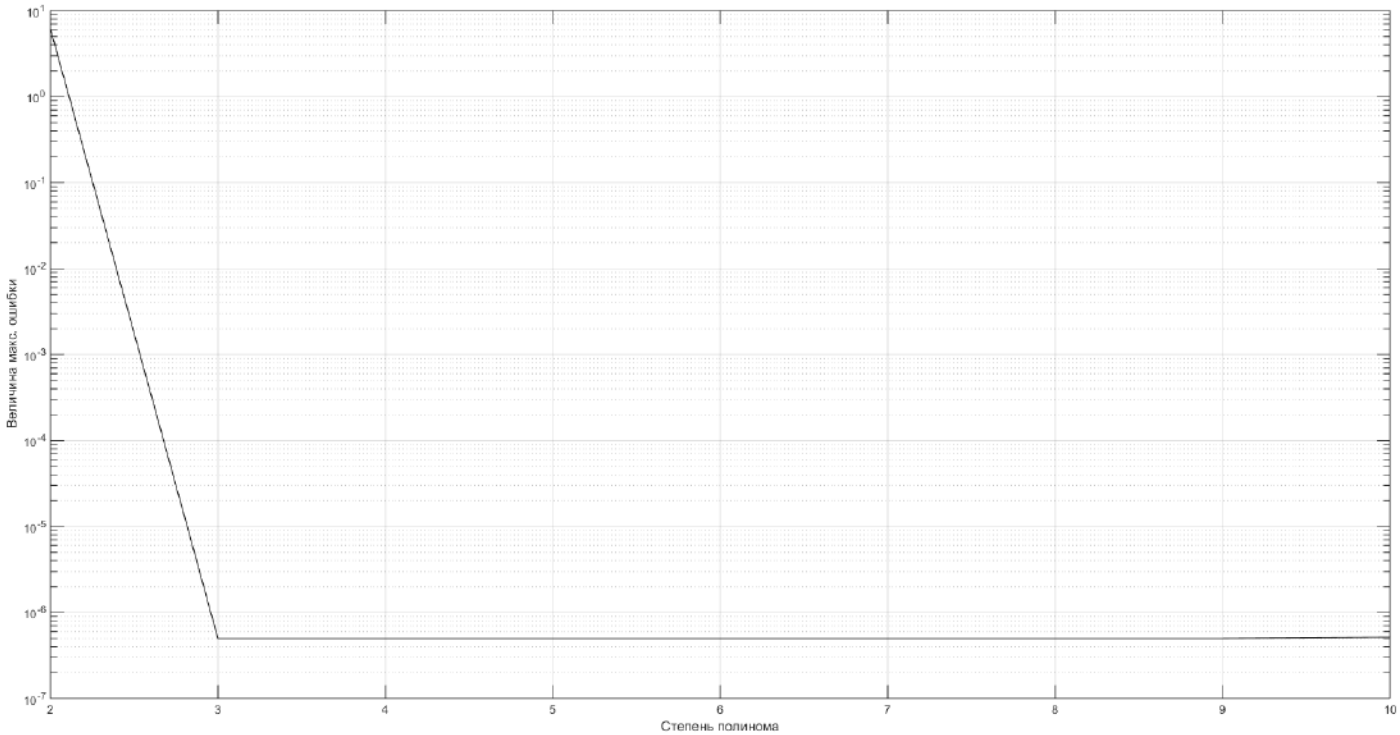

Рис. 9: График максимальной ошибки от степени полинома, функция 2

Оба графика дают понять, что с увеличением степени полинома погрешность уменьшается.

Дополнительное задание: влияние заданного веса узлов на МНК

Сумма узлов равна 1, меняется вес лишь одной точки, отмеченной красным маркером на следующих 6 графиках. Вес остальных точек распределяется равномерно.

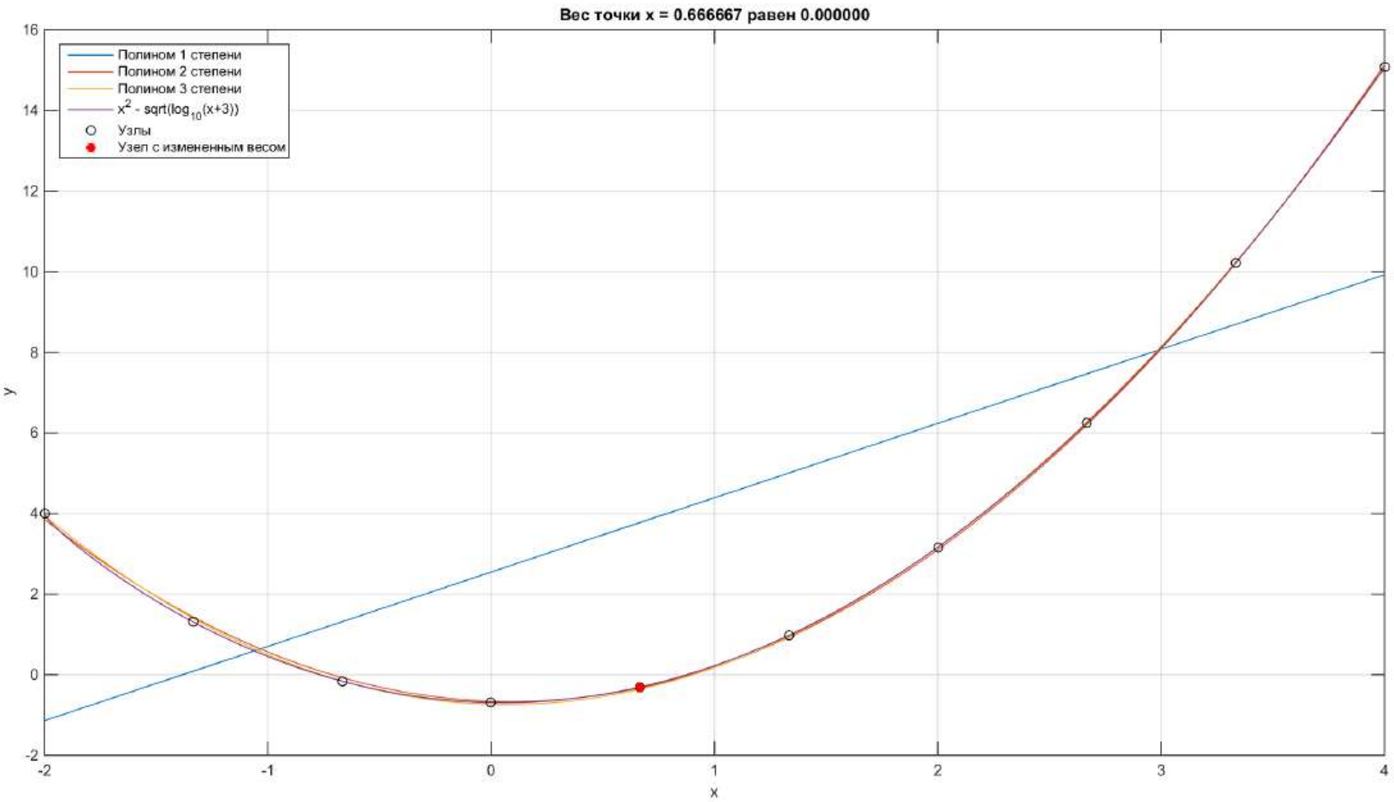

Рис. 10: График функции 1 и полиномов 1,2,3 степени, с узлом, имеющим вес 0

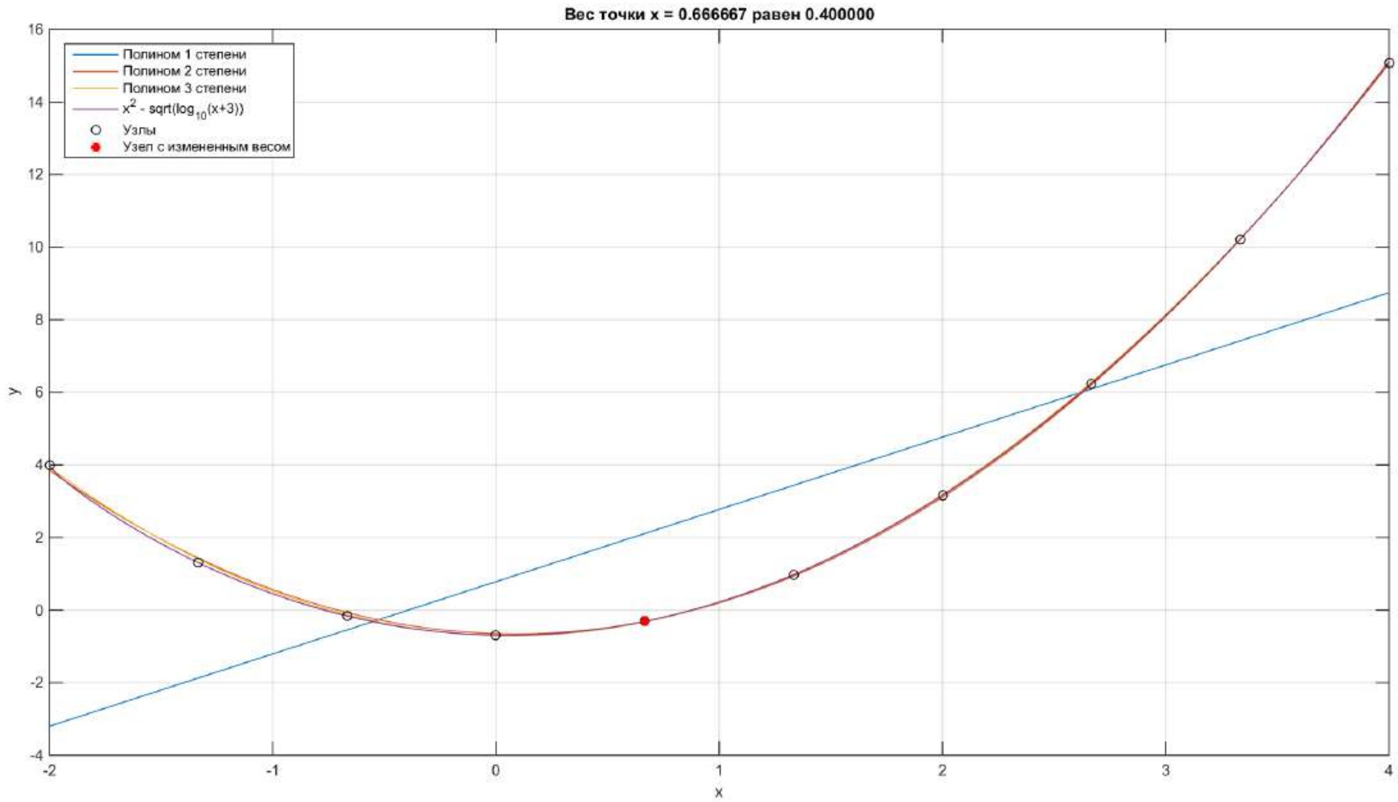

Рис. 11: График функции 1 и полиномов 1,2,3 степени, с узлом, имеющим вес 0.4

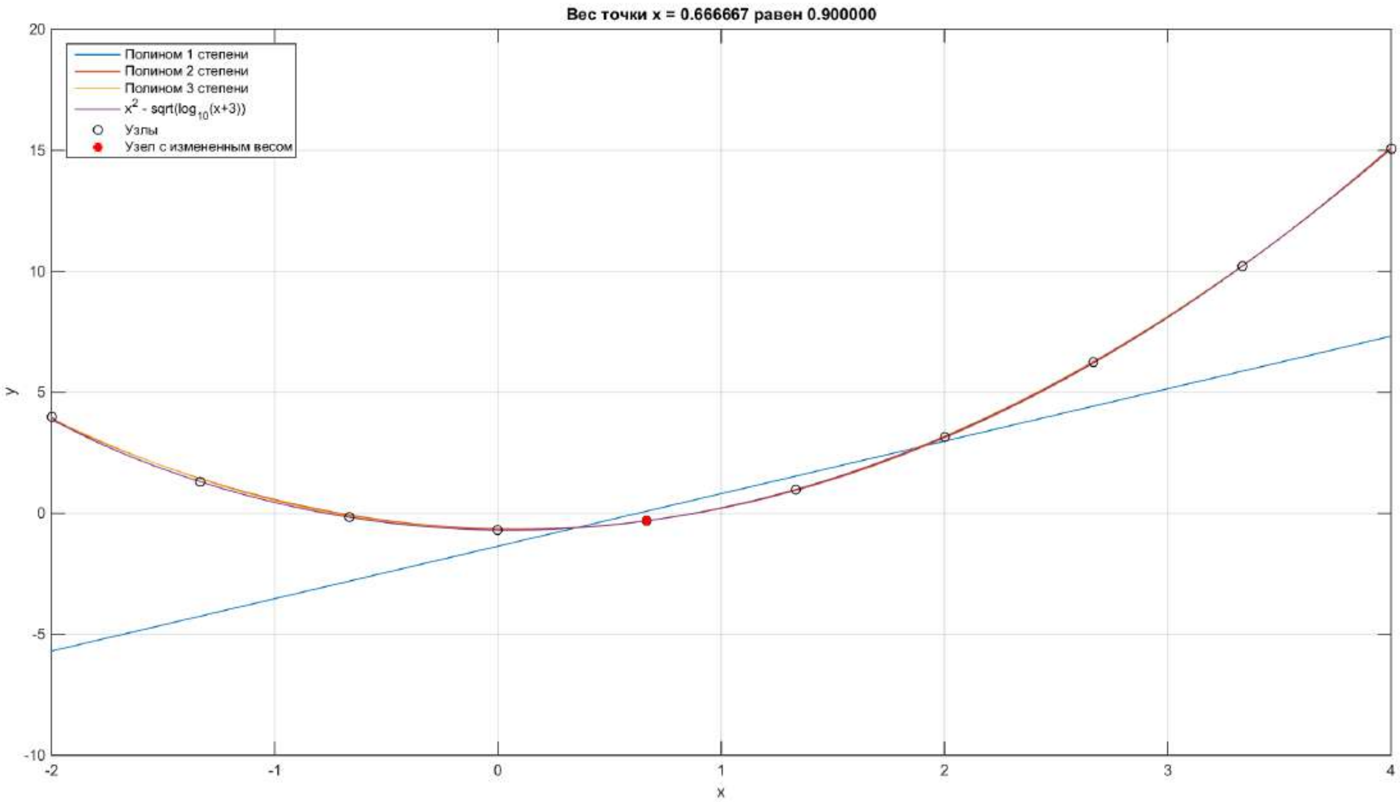

Рис. 12: График функции 1 и полиномов 1,2,3 степени, с узлом, имеющим вес 0.9

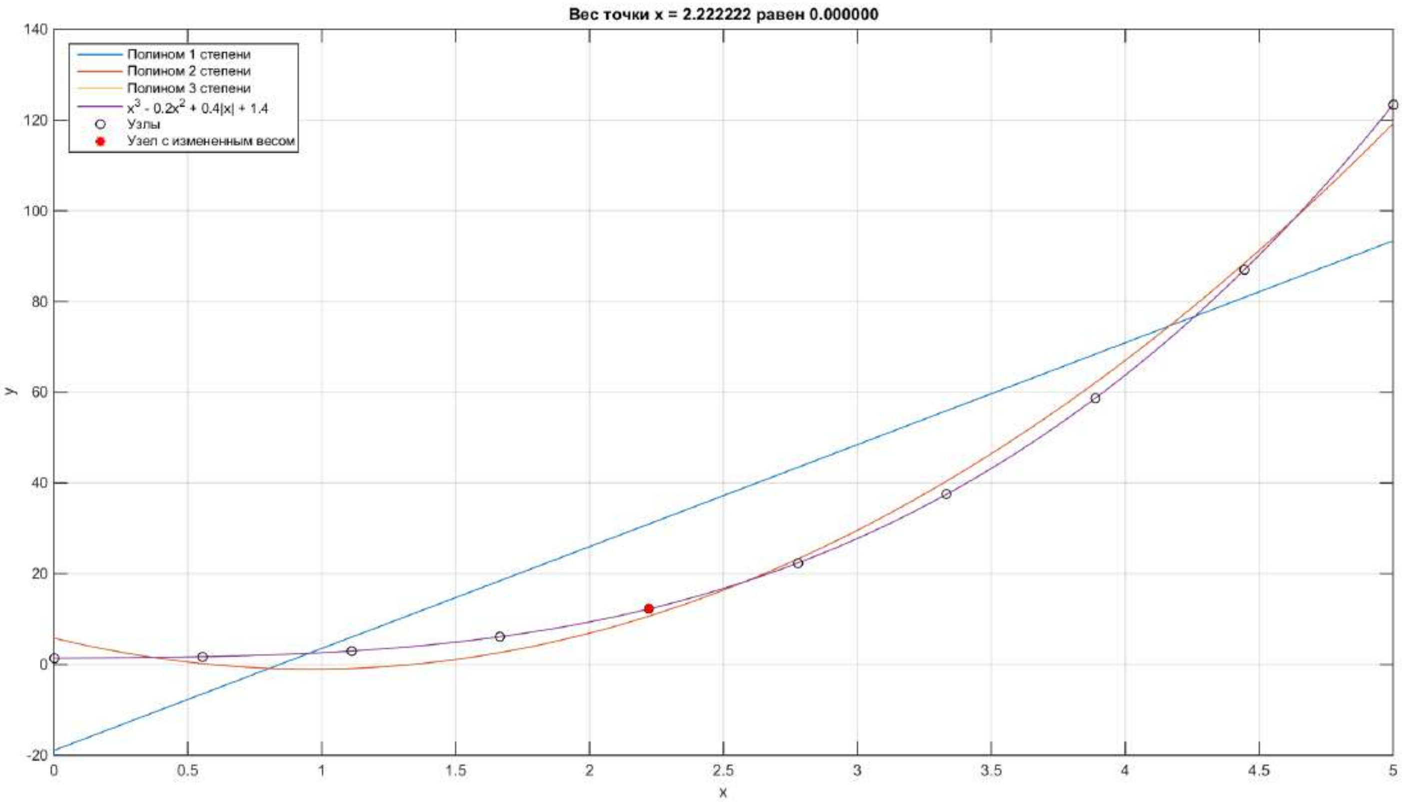

Рис. 13: График функции 2 и полиномов 1,2,3 степени, с узлом, имеющим вес 0

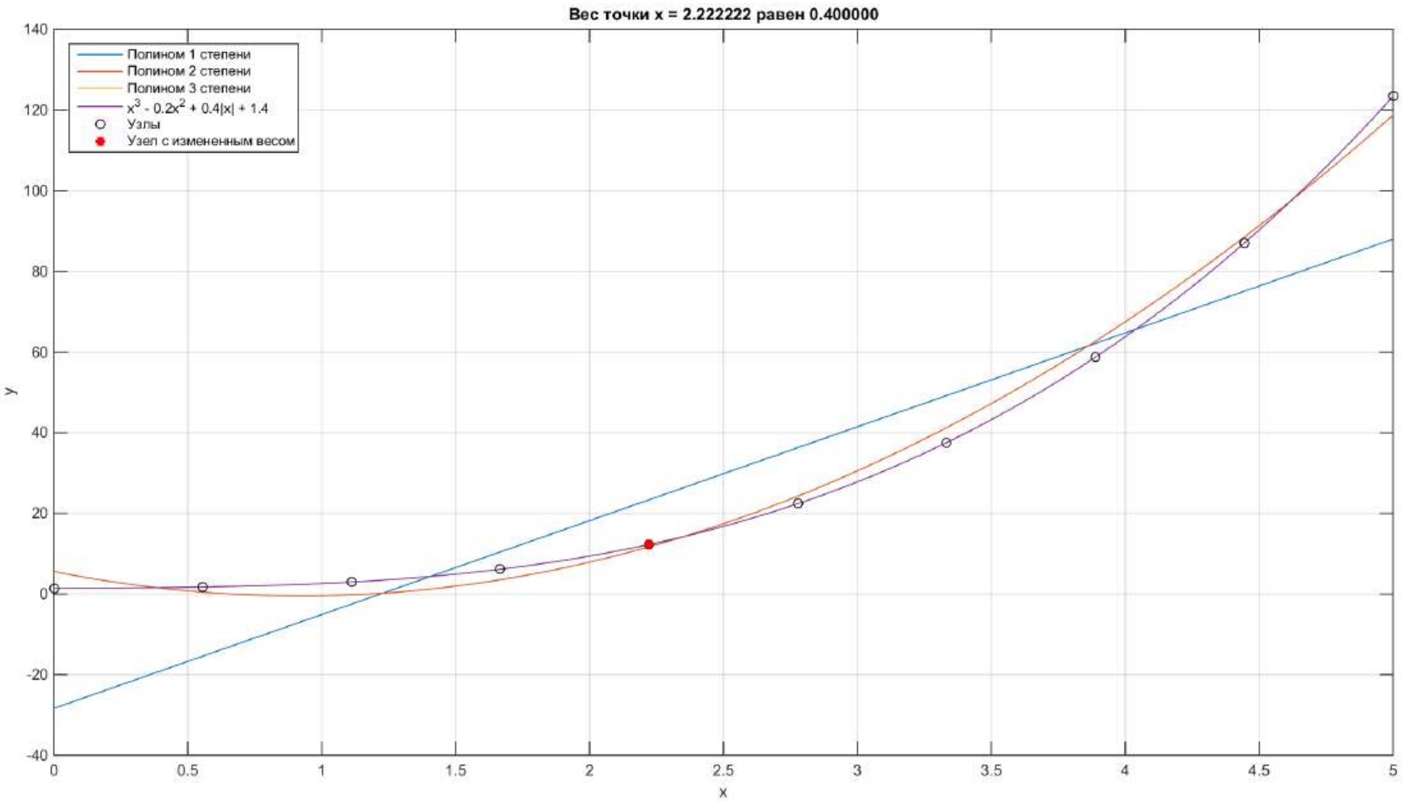

Рис. 14: График функции 2 и полиномов 1,2,3 степени, с узлом, имеющим вес 0.4

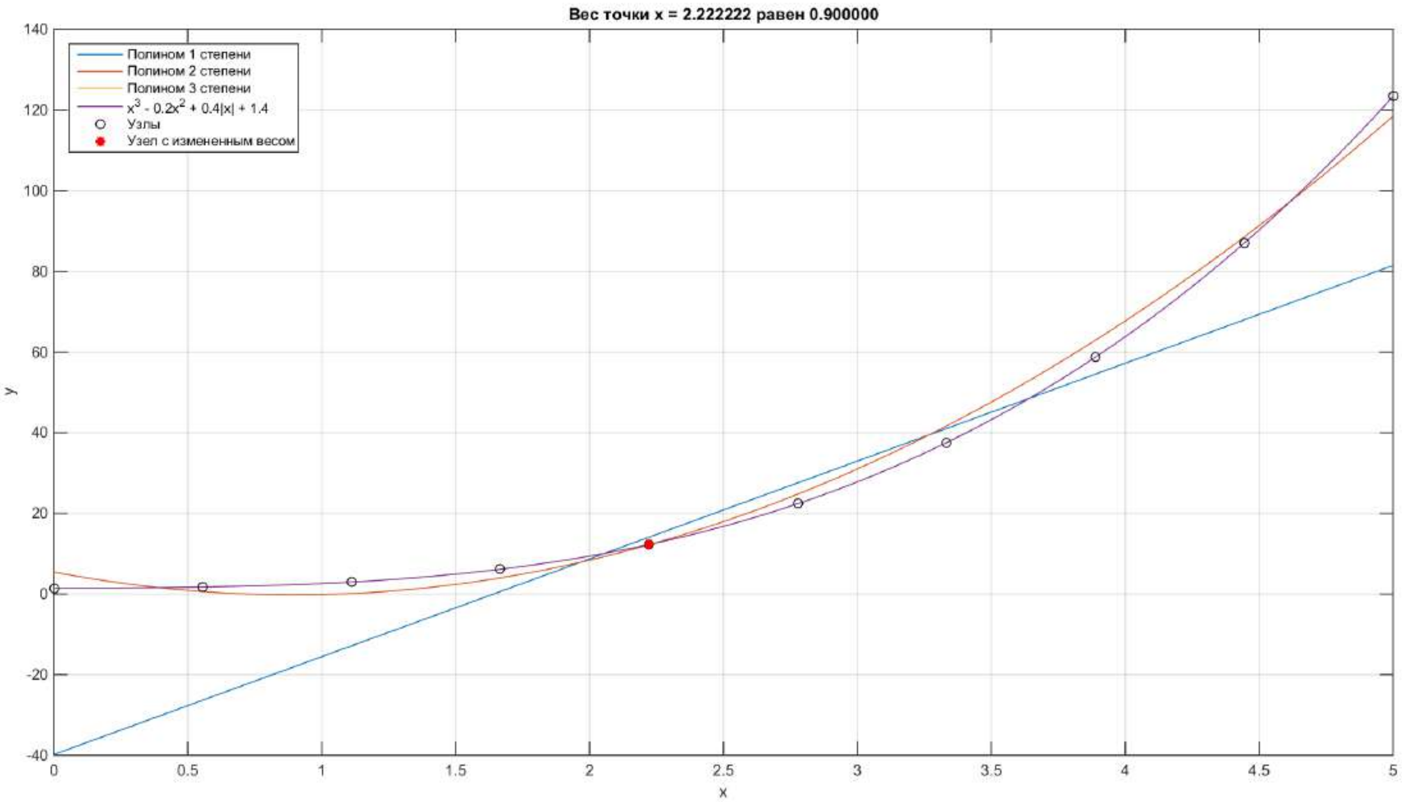

Рис. 15: График функции 2 и полиномов 1,2,3 степени, с узлом, имеющим вес 0.9

Из всех представленных рисунков видно, что при приближении веса точки к максимальному значению (к 1), графики всех трех полиномов "стараются попасть"в эту точку.

Далее приведу анализ ошибки полиномов в точке, максимальной ошибки при увеличении веса одной точки

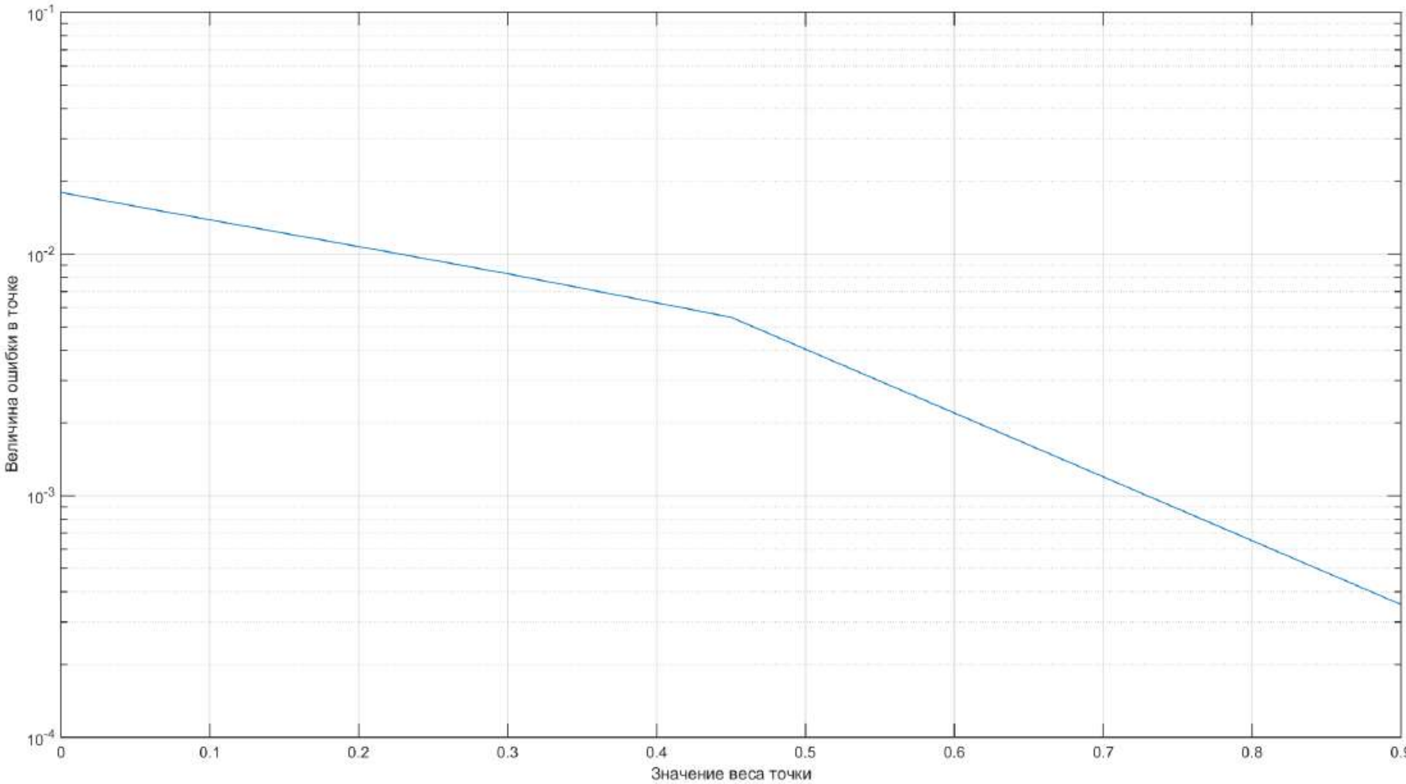

Рис. 16: График ошибки в точке, в которой происходит изменение веса, от веса этой точки, функция 1

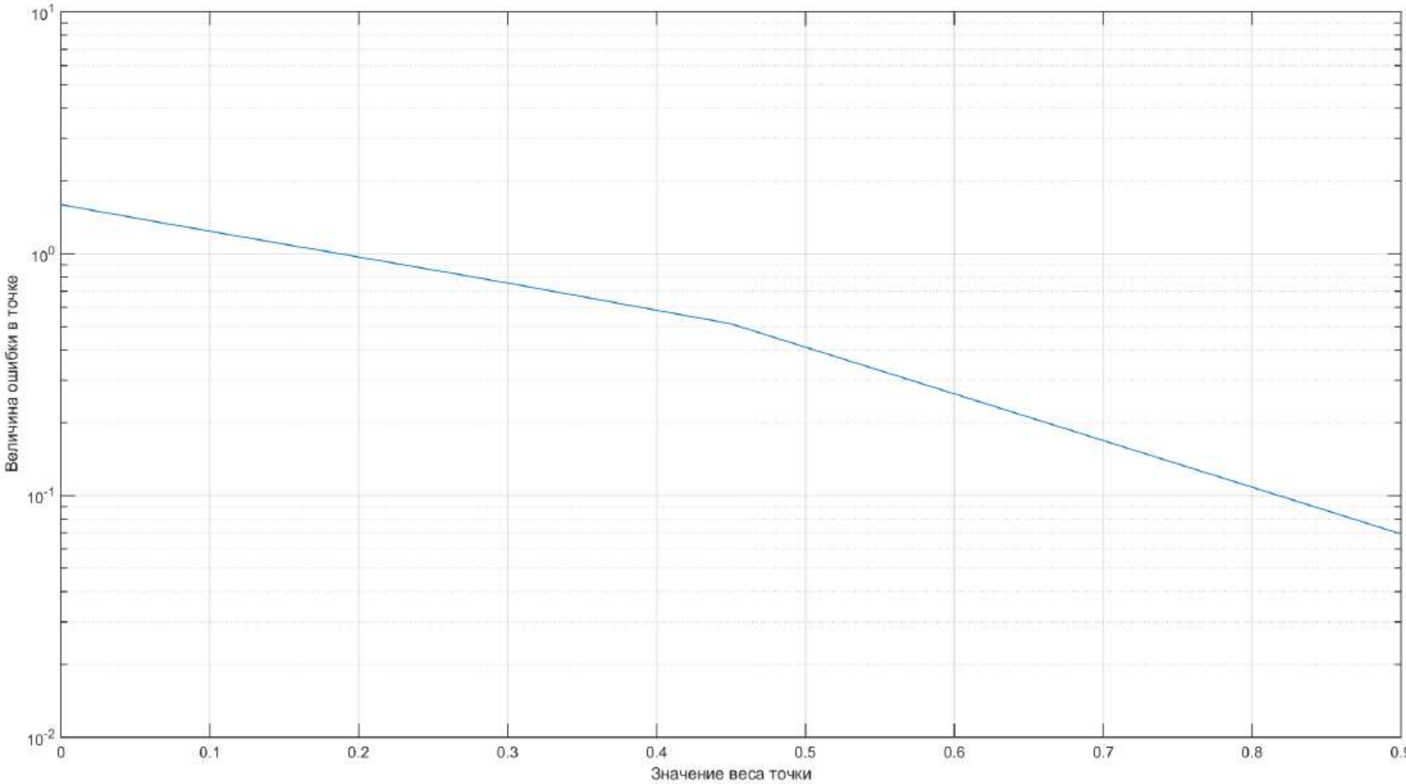

Рис. 17: График ошибки в точке, в которой происходит изменение веса, от веса этой точки, функция 2

Рисунки 16 и 17 показывают ожидаемую картину - при увеличении веса в точке, ошибка в этой точке уменьшается

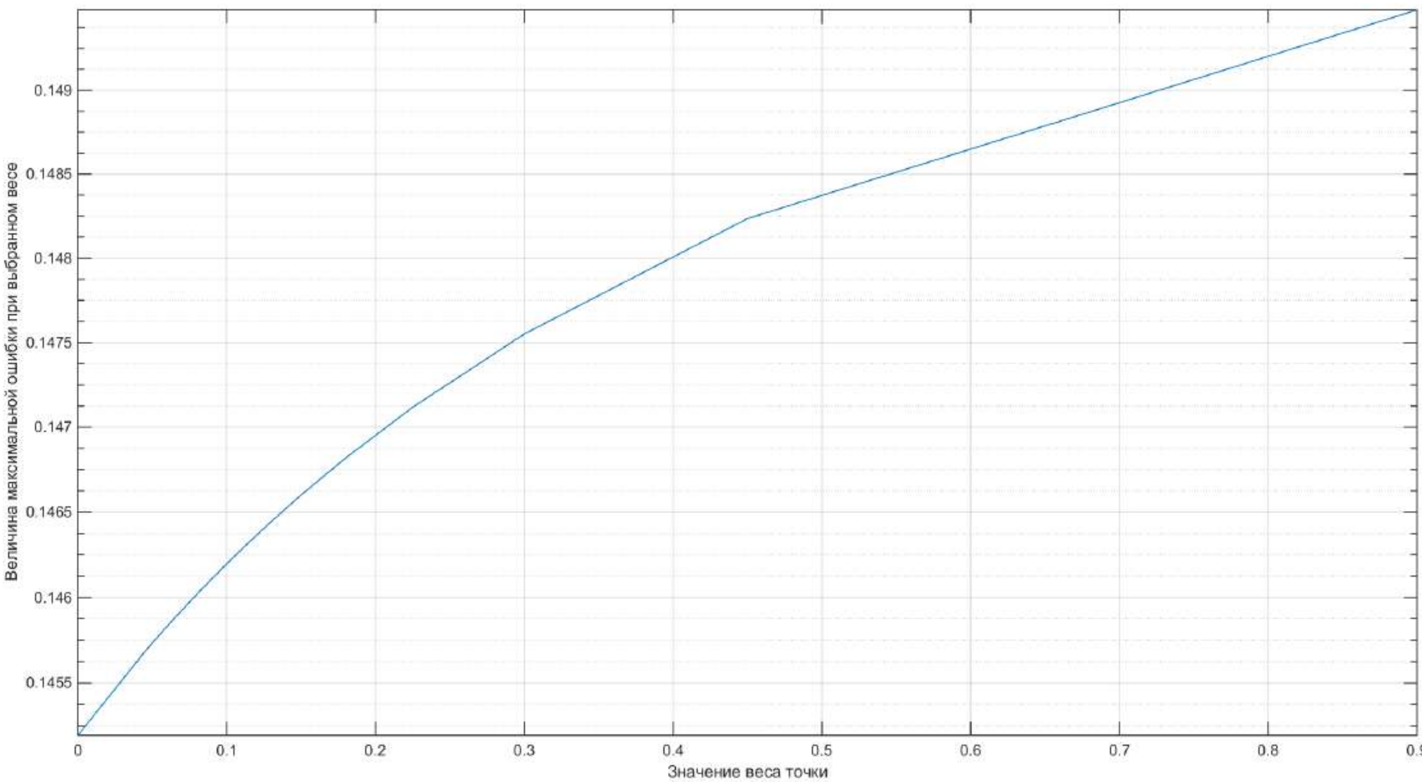

Рис. 18: График максимальной ошибки приближения в зависимости от веса одного узла, функция 1

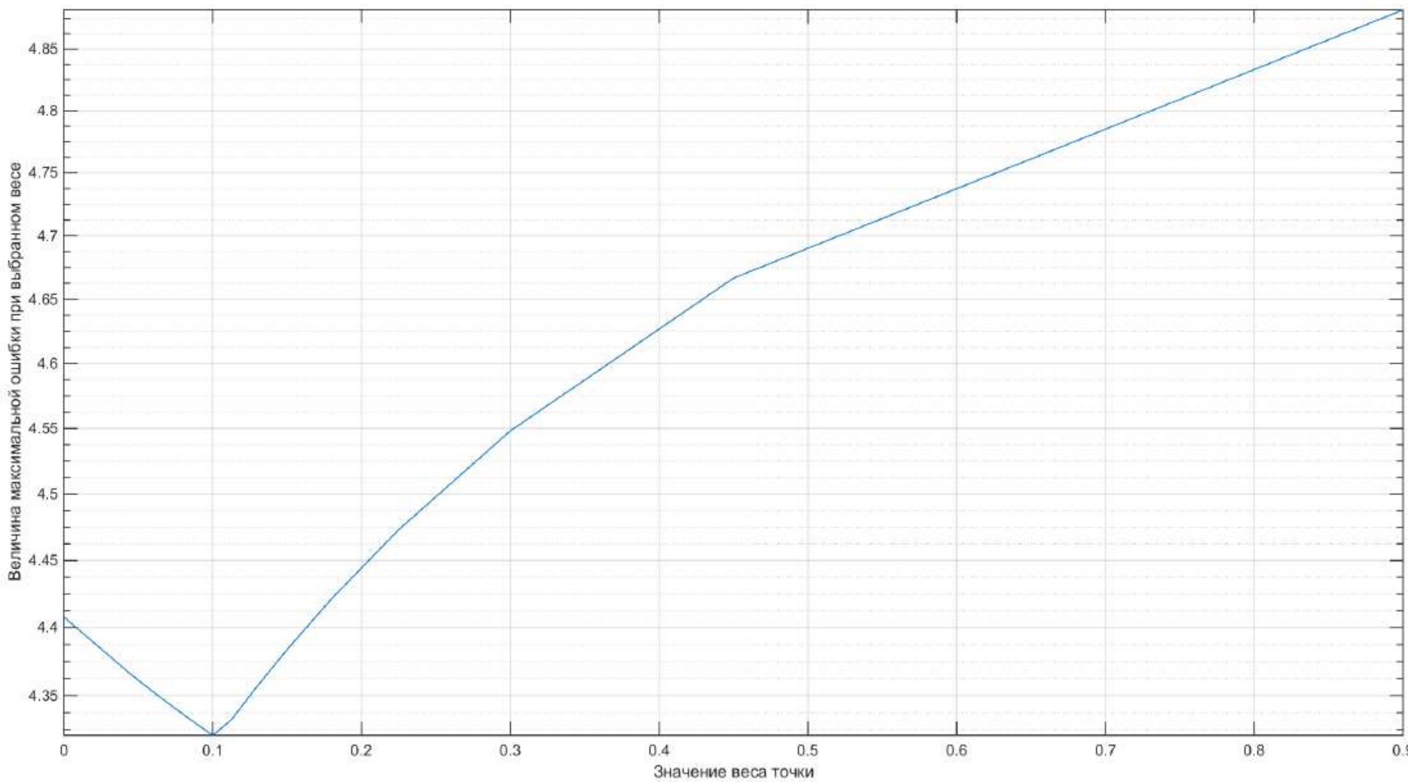

Рис. 19: График максимальной ошибки приближения в зависимости от веса одного узла, функция 2

Графики продемонстрировали ожидаемое увеличение максимальной величины ошибки с ростом веса одного узла.

Выводы

1. Метод наименьших квадратов для системы алгебраических полиномов приближает функцию тем точнее, чем выше степень полинома
2. Большое число узлов отрицательно влияет на приближение
3. Выбор веса узла - весьма оптимальное решение в условиях разбивки данных по категориям: для определенной выборки точек, играющих важную роль в приближении можно выбрать больший вес.