

*В. В. Курц  
С. Б. Добрецова*

## ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

*Учебное пособие*

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

---

Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

*В. В. Куриц С. Б. Добрецова*

# ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Учебное пособие



**ПОЛИТЕХ-ПРЕСС**

Санкт-Петербургский  
политехнический университет  
Петра Великого

Санкт-Петербург

2023

УДК 519.65(075.8)  
ББК 22.19  
К93

Рецензенты:

Кандидат физико-механических наук, младший научный сотрудник  
ИПМ им. Келдыша РАН *А. А. Чечина*  
Кандидат физико-механических наук, доцент  
ВШПМиВФ СПбПУ *И. Е. Ануфриев*

*Курц В. В. Приближение функций* : учеб. пособие / В. В. Курц, С. Б. Добрецова. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2023. – 70 с.

Учебное пособие соответствует содержанию направлений бакалаврской подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 01.03.03 «Механика и математическое моделирование», 03.03.01 «Прикладные математика и физика».

Рассматривается задача приближения функций. Разбираются наиболее распространенные методы интерполяции: полиномиальная интерполяция и интерполяция сплайнами. В качестве интерполяционных полиномов представлены полином Лагранжа, Ньютона и Эрмита. Интерполяция сплайнами рассмотрена на примере квадратичных и кубических сплайнов. Также в пособии описаны методы, базирующиеся на критерии сглаживания: метод наименьших квадратов и приближение функций с использованием сглаживающих сплайнов. Помимо теоретического материала в пособии представлены разделы, посвященные практическим работам. В каждом разделе, соответствующем отдельной лабораторной работе, формулируется задание и возможные исследования, представлены варианты и примеры выполнения.

Пособие предназначено для студентов, изучающих дисциплину «Численные методы», а также для преподавателей и инженеров, чья деятельность связана с вопросами вычислительной математики.

Табл. 8. Ил. 24. Библиогр.: 14 назв.

Печатается по решению  
Совета по издательской деятельности Ученого совета  
Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

ISBN 978-5-7422-8018-7

© Курц В. В., Добрецова С. Б., 2023  
© Санкт-Петербургский политехнический  
университет Петра Великого, 2023

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>4</b>
1.1	Постановка задачи . . . . .	4
1.2	Критерии близости . . . . .	4
1.3	Основной подход к решению задачи аппроксимации . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Полиномиальная интерполяция</b>	<b>9</b>
2.1	Существование и единственность интерполяционного полинома	9
2.2	Интерполяционный полином в форме Лагранжа . . . . .	10
2.3	Интерполяционный полином в форме Ньютона . . . . .	17
2.4	Интерполяция с кратными узлами. Полином Эрмита . . . . .	22
2.5	О сходимости интерполяционного процесса . . . . .	26
2.6	Лабораторная работа . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Приближение табличных функций сплайнами</b>	<b>33</b>
3.1	Эрмитова интерполяция . . . . .	35
3.2	Интерполирование квадратичными сплайнами . . . . .	35
3.3	Интерполяционный кубический сплайн . . . . .	37
3.4	Лабораторная работа . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Метод наименьших квадратов</b>	<b>48</b>
4.1	Постановка задачи . . . . .	49
4.2	Построение МНК-модели . . . . .	50
4.3	Полиномиальные МНК-модели . . . . .	52
4.4	Взвешенный метод наименьших квадратов . . . . .	53
4.5	Лабораторная работа . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Сглаживающие сплайны</b>	<b>59</b>
5.1	Построение сглаживающего сплайна . . . . .	60
5.2	Лабораторная работа . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Упражнения</b>	<b>67</b>
<b>7</b>	<b>Список литературы для самостоятельного изучения</b>	<b>69</b>

# 1 Введение

## 1.1 Постановка задачи

Пусть имеется набор двумерных точек  $(x_i, y_i), i = 0, \dots, n$ . Множество абсцисс  $x^h := \{x_i\}_{i=0}^n$  будем называть сеткой, а множество ординат  $y^h := \{y_i\}_{i=0}^n$  - сеточной функцией.

Если элементы  $x^h$  занумерованы в порядке возрастания, то сетка называется упорядоченной. Более того, если

$$x_i = x_0 + ih, i = 0, \dots, n$$

то такая сетка называется равномерной.

Пусть табличная функция задана парой элементов  $(x^h, y^h)$ . Тогда задача приближения табличной функции, или задача её аппроксимации, заключается в следующем. Требуется построить функцию  $\phi(x)$ , которая удовлетворяет некоторому критерию близости

$$\phi(x) \approx (x^h, y^h)$$

и  $\phi(x) \in C^{(k)}([a, b])$ , где  $[a, b]$  - отрезок, содержащий все  $x_i$ .

## 1.2 Критерии близости

Существует несколько критериев близости, исходя из которых выполняется построение искомой функции  $\phi(x)$ . Использование того или иного критерия определяется особенностями исходных данных, а также спецификой решаемой задачи. Приведём некоторые критерии.

1. Критерий интерполирования требует, чтобы значения функции  $\phi(x)$  совпадали со значениями сеточной функции  $y^h$  в соответствующих узлах сетки  $x^h$

$$\phi(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n. \quad (1)$$

Набор равенств (1) носит название условий интерполирования. С графической точки зрения выполнение этих условий эквивалентно тому, что график искомой функции  $\phi(x)$  проходит через заданные точки (левый график на рисунке 1).

2. Если заведомо известно, что сеточная функция  $y^h$  содержит ошибки (например, значения получены в результате эксперимента), то использование критерия интерполирования является нецелесообразным. Выполнение условий (1) приведёт к тому, что построенная функция  $\phi(x)$  ”вберёт” в себя все ошибки, которые присутствовали в исходных данных. Для такого рода задач более подходящим является один из существующих критериев сглаживания

$$\sum_{i=0}^n \rho_i (\phi(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min, \quad (2)$$

где  $\rho_i > 0$  - известные весовые коэффициенты. Функция  $\phi(x)$  строится таким образом, чтобы взвешенная сумма квадратов отклонений между её значениям в точках сетки  $\phi(x_i)$  и соответствующими значениями сеточной функции  $y_i$  была минимальной (правый график на рисунке 1). Существуют и другие критерии сглаживания, например, взвешенная сумма абсолютных невязок

$$\sum_{i=0}^n \rho_i |\phi(x_i) - y_i| \rightarrow \min.$$

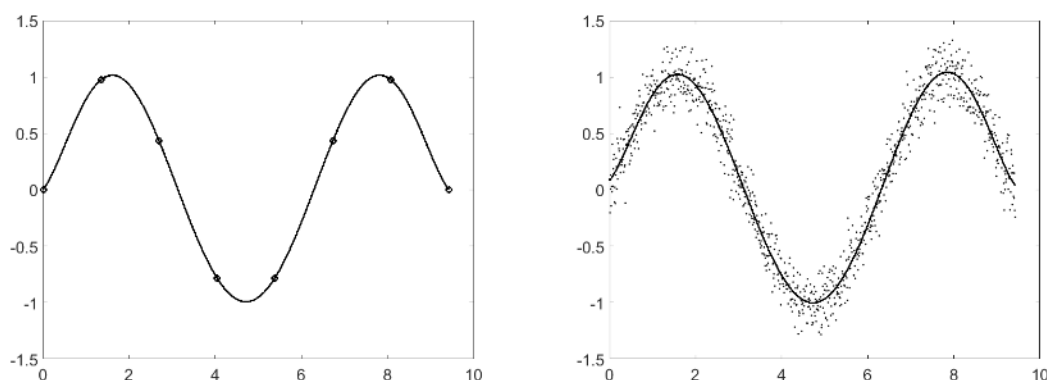


Рис. 1: Критерий интерполирования (слева) и критерий сглаживания (справа)

Перед обсуждением существующих подходов, которые используются для решения задачи приближения табличных функций, разумно ответить на следующий вопрос: зачем решать задачу аппроксимации? Можно привести несколько случаев:

1. табличная функция получена в результате серии экспериментов. Если известна модель процесса, то можно попытаться подобрать её параметры. Если модель неизвестна, то табличную функцию можно приблизить, например, полиномом. В обоих случаях далее можно вычислять значения в точках, которые не являются элементами  $x^h$ .

В качестве простого и наглядного примера рассмотрим закон Гука, который утверждает, что деформация, возникающая в упругом теле, пропорциональна приложенной к этому телу силе (это справедливо только при малых деформациях, и при превышении предела пропорциональности связь между силой и деформацией становится нелинейной). Пусть ставится задача определить коэффициент жёсткости пружины  $k$ . Экспериментальная установка изображена на рисунке 2 слева. Используя грузы различной массы, можно получить табличную функцию, которая связывает растягивающую силу  $mg$  и абсолютное удлинение пружины  $x$  (график на рисунке 2 справа). Далее, предполагая линейную зависимость между данными величинами и используя один из методов аппроксимации (метод наименьших квадратов), можно определить значение коэффициента жёсткости  $k$ , которое оказывается достаточно близким к истинному значению (ошибка составляет примерно 1.5%).

2. упрощение вычисления значений "сложных" функций (а также вычисление слов производных и интегралов от "сложных" функций): исходная функция  $y(x)$  заменяется более "простой", например, полиномом  $P_n(x)$ .

### 1.3 Основной подход к решению задачи аппроксимации

Выберем некоторое множество функций  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^m$ ,  $\phi_j(x) \in C^{(k)}([a, b])$ , которые носят название базисных функций. Построим обобщённый полином

$$\phi(x) = \sum_{j=0}^m a_j \phi_j(x), \quad (3)$$

где числовые коэффициенты  $a_j$  определяются, исходя из критерия близости  $\phi(x)$  к  $(x^h, y^h)$ .

К системе базисных функций необходимо предъявить ряд требований. Во-первых, функции  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^m$  должны быть линейно независимыми (для обеспечения единственности, если решение существует).

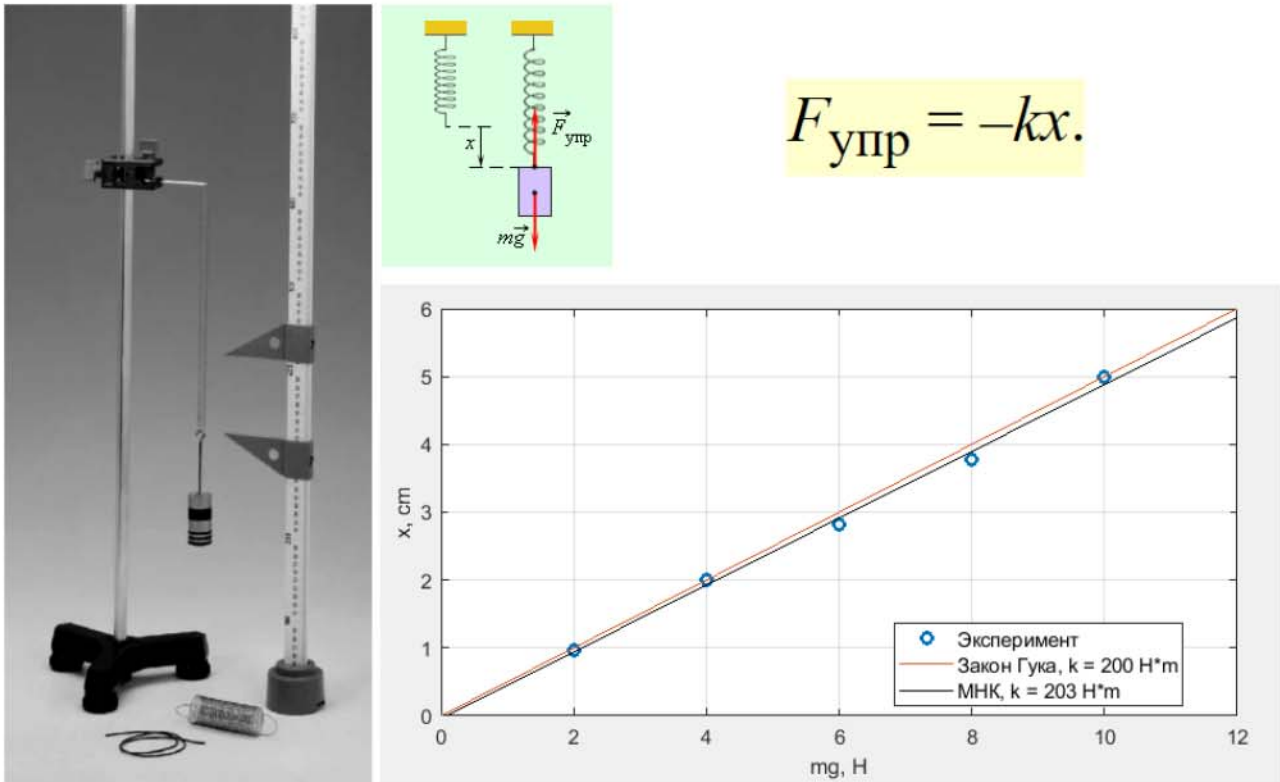


Рис. 2: Закон Гука. Определение коэффициента жёсткости пружины

*Определение.* Функции  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^m$  называются линейно независимыми, если

$$\phi(x) = 0, \forall x \Leftrightarrow a_j = 0, j = 0, \dots, m.$$

Во-вторых, множество базисных функций  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^m$  должно принадлежать системе  $\Phi$ , где  $\Phi = \{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  является пространством полных функций. Это условие даёт надежду (но не обеспечивает!) на то, что процесс приближения будет сходиться.

*Определение.* Множество  $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  называется полным в  $X$ , если  $\forall f \in X$  и  $\forall \epsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N}$  и набор коэффициентов  $\{a_j\}_{j=0}^m$

$$\left\| f - \sum_{j=0}^m a_j \phi_j(x) \right\|_X \leq \epsilon. \quad (4)$$

Примеры систем базисных функций.

1. Если  $\phi_j(x) = x^j$ , то искомая функция  $\phi(x)$  является алгебраическим полиномом.



Здесь будет уместным вспомнить теорему Вейерштрасса, которая утверждает следующее: любую непрерывную на отрезке  $[a, b]$  функцию можно равномерно на этом отрезке приблизить полиномом с вещественными коэффициентами с наперёд заданной точностью  $\epsilon$ .

2. Если  $\{\phi_j(x)\} = \{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots\}$ , то функция  $\phi(x)$  является тригонометрическим полиномом.

## 2 Полиномиальная интерполяция

Пусть в качестве критерия близости используется критерий интерполирования (1), а базисные функции имеют вид  $\phi_j(x) = x^j$ . В таком случае искомая функция  $\phi(x)$  является алгебраическим полиномом

$$\phi(x) = P_m(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j,$$

а задача приближения табличной функции называется задачей полиномиальной интерполяции.

### 2.1 Существование и единственность интерполяционного полинома

Обсудим, при каких условиях интерполяционный полином  $P_m(x)$  можно построить, а также в каком случае он будет единственным.

Пусть задана табличная функция  $(x_i, y_i), i = 0, \dots, n$ . Потребуем выполнения условий интерполяции  $P_m(x_i) = y_i$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_m x_0^m = y_0 \\ \dots = \dots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_m x_n^m = y_n \end{cases} \quad (5)$$

Набор равенств (5) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных  $a_j$ . Данная система имеет единственное решение, если

1. матрица СЛАУ является квадратной, т.е.  $n + 1 = m + 1$ ;
2. определитель СЛАУ отличен от 0.

Первое условие говорит о том, что степень интерполяционного полинома  $P_m(x)$  должна быть на 1 меньше, чем количество точек. Для выполнения второго условия необходимо и достаточно, чтобы все узлы  $x_i$  были попарно различны.

*Упражнение.* Докажите, что  $x_i$  попарно различны  $\Leftrightarrow$  определитель СЛАУ (5) не равен 0.

## 2.2 Интерполяционный полином в форме Лагранжа

Коэффициенты интерполяционного полинома  $P_m(x)$  можно определить путём решения СЛАУ (5). Однако на практике используют другие формы записи данного полинома, одной из которых является форма Лагранжа.

Будем искать  $P_n(x)$  в следующем виде

$$P_n(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \Phi_i(x), \quad (6)$$

где  $\Phi_i(x)$  носит название  $i$ -го базисного полинома Лагранжа. Если потребовать выполнения условий

$$\Phi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad (7)$$

где  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера, то условия интерполирования (1) будут выполнены. Действительно, при подстановке  $x_j$  в формулу (6) за счёт условий (7) все слагаемые в сумме за исключением  $j$ -го обнулятся, а  $j$ -е слагаемое будет равняться  $y_j$ .

Определим базисные полиномы Лагранжа  $\Phi_i(x)$ . В силу выполнения условий (7) полином  $\Phi_i(x)$  обращается в 0 во всех узловых точках за исключением  $x_i$ , а значит все эти точки являются его корнями. Тогда  $\Phi_i(x)$  можно искать в следующем виде

$$\Phi_i(x) = \alpha_i \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (x - x_k),$$

где  $\alpha_i$  - некоторое (пока неизвестное) число. Определим  $\alpha_i$  из условия  $\Phi_i(x_i) = 1$

$$\Phi_i(x_i) = 1 = \alpha_i \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (x_i - x_k)$$

и получим выражение для базисного полинома  $\Phi_i(x)$

$$\Phi_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}. \quad (8)$$

Подставив (8) в (6), приходим к формуле интерполяционного полинома в форме Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}. \quad (9)$$

Формулу (9) можно записать в более компактном виде. Введем понятие корневого полинома  $\omega(x)$

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k).$$

С учётом представленных ниже преобразований

$$\omega'(x) = \sum_{j=0}^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (x - x_k) \Rightarrow \omega'(x_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (x_i - x_k) \Rightarrow \Phi_i(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}$$

приходим к следующей записи интерполяционного полинома в форме Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}. \quad (10)$$

*Пример.* Построим интерполяционный полином в форме Лагранжа по данным  $x^h = \{0, 2, 3, 5\}, y^h = \{1, 3, 2, 5\}$ . Применяя формулу (9), получим полином третьей степени

$$L_3(x) = 1 \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)} + 3 \frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{(2-0)(2-3)(2-5)} + 2 \frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(3-0)(3-2)(3-5)} + 5 \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(5-0)(5-2)(5-3)}$$

график которого представлен на рисунке 3.

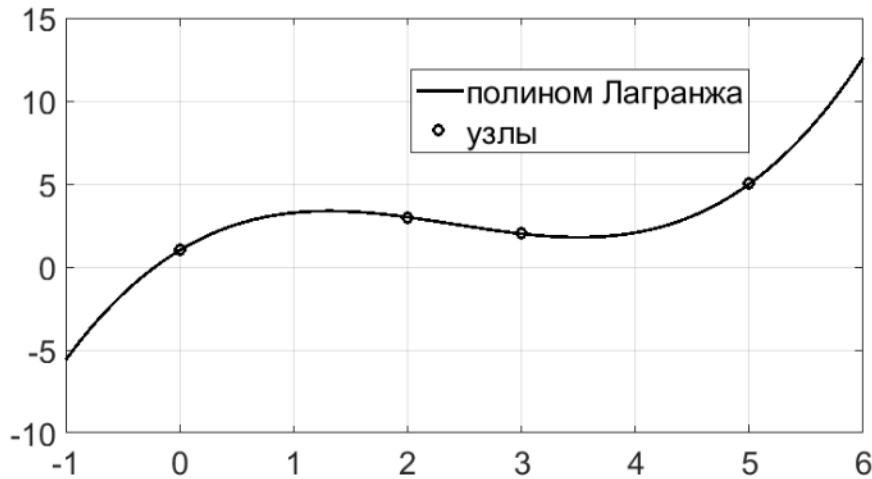


Рис. 3: Интерполяционный полином, построенный по четырём узлам

### 2.2.1 Интерполяционный полином Лагранжа для равноотстоящих узлов

Пусть задача интерполяции решается на равномерной сетке с шагом  $h$ , т.е.  $x_i = x_0 + ih, i = 0, \dots, n$ . Тогда любая точка отрезка  $[x_0, x_n]$  может быть вычислена по формуле  $x = x_0 + th$ , где  $t \in [0, n]$  и справедливы следующие равенства

$$x - x_k = h(t - k), x_i - x_k = h(i - k), \forall i, k = 0, \dots, n. \quad (11)$$

Подставим выражения (11) в формулу (9)

$$\begin{aligned} L_n(x_0 + th) &= \sum_{i=0}^n y_i \frac{(t-0)(t-1)\dots(t-i+1)(t-i-1)\dots(t-n)}{(i-0)(i-1)\dots 1(-1)\dots(i-n)} \frac{t-i}{t-i} \\ &= \sum_{i=0}^n y_i \frac{(-1)^{n-i} \omega(t)}{i! (n-i)! (t-i)}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\omega(t) = \prod_{k=0}^n (t-k)$ .

Заметим, что коэффициенты при  $y_i$  в формуле (12) не зависят ни от функции  $y(x)$ , которая порождает сеточную функцию  $y^h$ , ни от шага сетки  $h$ . Правая часть выражения (12) вообще не зависит от шага  $h$ , и для равномерной сетки не важна длина отрезка. Всё это говорит в пользу того, что все коэффициенты могут быть вычислены заранее для конкретных значений  $n$ . За счёт этого временные затраты можно сократить.

### 2.2.2 Погрешности интерполяционной формулы Лагранжа

В результате применения интерполяционного подхода неизбежно возникновение ошибок, которые условно можно разделить на три группы.

1. Ошибка метода. Интерполяционный многочлен  $L_n(x)$  совпадает с функцией  $y(x)$  в узлах  $x_i$ , но в остальных точках значения могут отличаться.
2. Неустраняемая погрешность. Значения сеточной функции  $y^h$  могут заведомо содержать ошибки.
3. Погрешность округления, которая неизбежна в случае арифметики с плавающей точкой.

Для иллюстрации того, как неустранимая погрешность может повлиять на точность результата, приведём следующий пример. Пусть  $y(x) = \sin(2\pi x)$ , а задача интерполяции решается на отрезке  $[-1, 1]$ . На данном отрезке построим равномерную сетку из 22 узлов. Пусть неустранимая погрешность в каждой узловой точке  $x_i$  не превышает значение  $10^{-4}$

$$|y(x_i) - \tilde{y}(x_i)| \leq 10^{-4},$$

где  $y(x_i)$  и  $\tilde{y}(x_i)$  - истинное и приближённое значения.

На рисунке 4 представлены графики двух интерполяционных полиномов в форме Лагранжа, которые построены по истинным (сплошная линия) и приближённым (прерывистая линия) значениям сеточной функции соответственно. Значительные (по сравнению с величиной неустранимой погрешности) отклонения графиков полиномов друг от друга на краях отрезка в неузловых точках говорят о неустойчивости лагранжевой интерполяции.

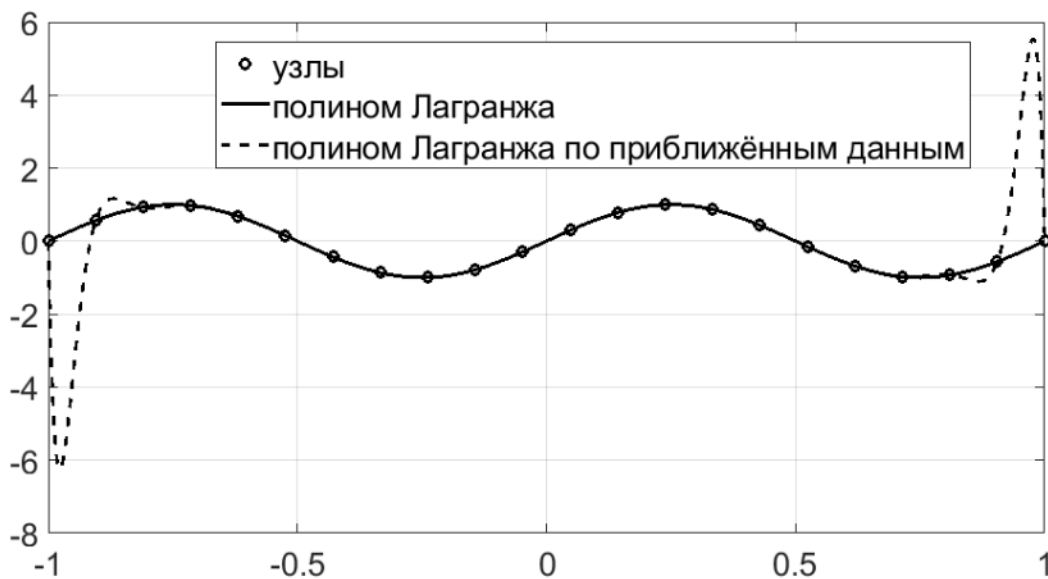


Рис. 4: Неустойчивость интерполяционного полинома

Поговорим подробно об ошибке метода и получим формулу для погрешности интерполяционного полинома в форме Лагранжа. Предположим, что  $y(x) \in C^{(n+1)}([a, b])$  и  $x^h \subset [a, b]$ . Ошибку интерполяции определим следующим образом

$$R_n(x) = y(x) - L_n(x).$$

Рассмотрим вспомогательную функцию  $\psi(x)$

$$\psi(x) = y(x) - L_n(x) - k\omega(x), \tag{13}$$

где  $k$  - некоторая константа. Подберем  $k$  так, чтобы  $\psi(x) = 0$ , где  $x$  - точка, для которой производится оценка погрешности

$$k = \frac{y(x) - L_n(x)}{\omega(x)}. \quad (14)$$

Функция  $\psi(x) \in C^{(n+1)}([a, b])$  имеет  $n + 2$  различных корня на отрезке  $[a, b]$ , поскольку  $\psi(x_i) = 0, i = 0, \dots, n$ . Поэтому  $\psi'(x)$  имеет  $n + 1$  корень на  $[a, b]$ , а  $\psi^{(n+1)}(x)$  имеет 1 корень, который обозначим  $\eta \in [a, b]$ .

Тогда  $\psi^{(n+1)}(\eta) = y^{(n+1)}(\eta) - 0 - k(n + 1)! = 0$  и

$$k = \frac{y^{(n+1)}(\eta)}{(n + 1)!}. \quad (15)$$

Подставив (15) в (13), получаем выражение для ошибки интерполяционного полинома в форме Лагранжа

$$y(x) - L_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(\eta)}{(n + 1)!} \omega(x), \forall x \in [a, b]. \quad (16)$$

Полагая  $M_{n+1} = \sup_{x \in [a, b]} |y^{(n+1)}(x)|$ , имеем

$$|y(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n + 1)!} |\omega(x)|, \forall x \in [a, b]. \quad (17)$$

Формулы (16) и (17) в общем случае носят теоретический характер, поскольку точка  $\eta$  неизвестна, а вычислить константу  $M_{n+1}$  в общем случае не удастся.

*Упражнение.* Пусть при фиксированном  $n$  для функции  $y(x)$  ошибка метода оказалась равной 0. Какой функцией является  $y(x)$ ?

*Пример.* С какой точностью можно вычислить  $\ln(100.5)$  по формуле Лагранжа, если известны значения  $\ln(100)$ ,  $\ln(101)$ ,  $\ln(102)$  и  $\ln(103)$ ? В данном случае  $n = 3$ ,  $a = 100$ ,  $b = 103$ ,  $y(x) = \ln(x)$ . Тогда  $y^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$  и  $M_4 = \frac{6}{100^4}$ . Применим формулу (17) для оценки погрешности интерполяционного полинома в точке  $x = 100.5$

$$|\ln(100.5) - L_3(100.5)| \leq \frac{6}{100^4 \cdot 4!} 0.5 \cdot 0.5 \cdot 1.5 \cdot 2.5 \approx 2.3 \cdot 10^{-9}.$$

На рисунке 5 представлены график интерполяционного полинома и график фактической ошибки. Из второго видно, что полученная оценка погрешности в точке  $x = 100.5$  достаточно близка к её истинному значению.

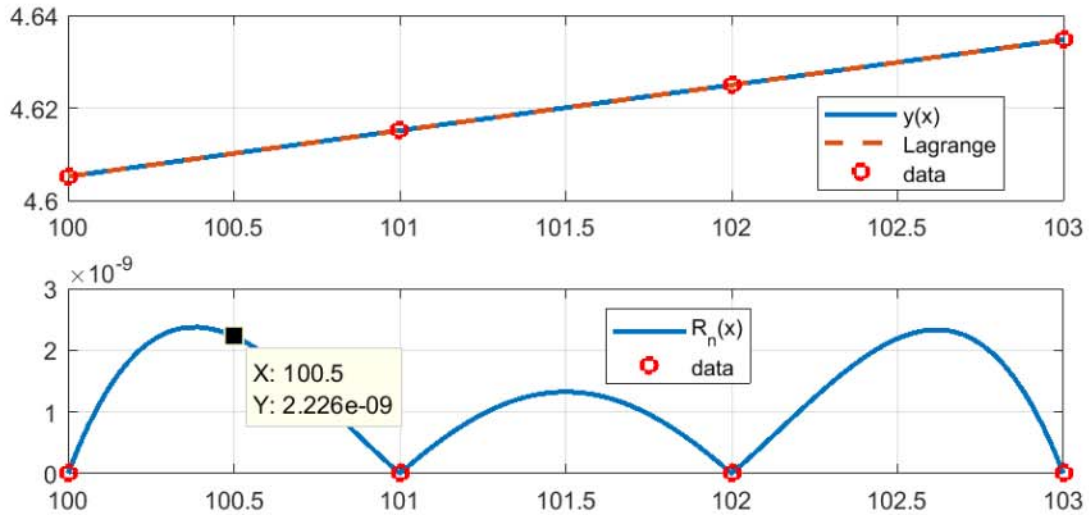


Рис. 5: Интерполяционный полином для функции  $\ln(x)$  на равномерной сетке по 4 узлам (сверху) и ошибка интерполяции (снизу)

### 2.2.3 Недостаток полиномиальной интерполяции на равномерной сетке

Увеличение количества узлов с целью повышения качества приближения кажется наиболее очевидным решением. Проанализируем поведение ошибки интерполяции с увеличением количества узлов на равномерной сетке на примере функции Рунге

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in [-5, 5]. \quad (18)$$

Из рисунка 6 видно, что с увеличением количества узлов сетки (в данном примере с 6 до 11) Лагранжева интерполяция, построенная на равномерной сетке, расходится в окрестности границ рассматриваемого отрезка  $[-5, 5]$ .

Данную проблему удастся решить, если отказаться от равномерного распределения узлов. Для этого проанализируем, от чего зависит ошибка интерполяции (17)

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)|.$$

При фиксированном  $n$  множитель  $\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$  является константой, а ошибку интерполяции можно уменьшить за счёт минимизации  $|\omega(x)|$ . Иными словами, будем выбирать узлы  $x_i$ , исходя из следующего условия

$$\max_{x \in [a,b]} |\omega(x)| \rightarrow \min,$$



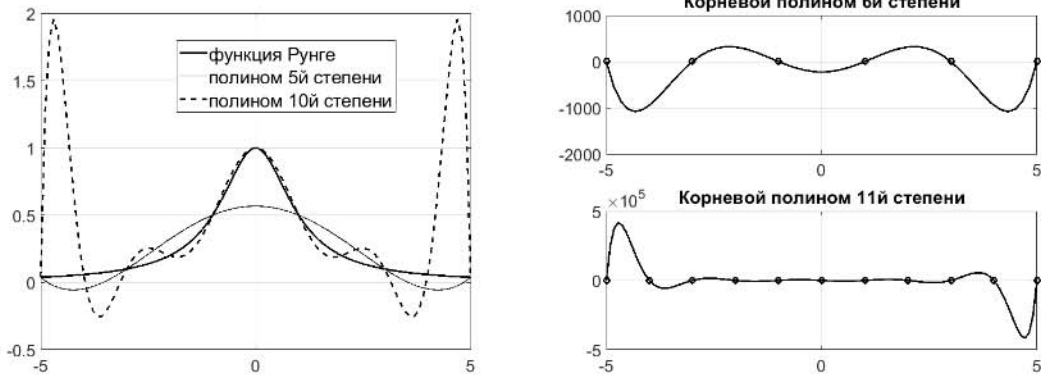


Рис. 6: Лагранжева интерполяция для функции Рунге на равномерной сетке: интерполяционный полином пятой и десятой степени (слева). Соответствующие корневые полиномы шестой и одиннадцатой степени (справа)

откуда получаем, что в случае отрезка  $[-1, 1]$  узлы сетки нужно выбирать как корни полинома Чебышева степени  $n + 1$  (рисунок 7), как полинома, наименее уклоняющегося от нуля

$$x_i = \cos\left(\frac{\pi(2i + 1)}{2(n + 1)}\right), i = 0, \dots, n.$$

В общем случае необходимо воспользоваться линейным отображением отрезка  $[-1, 1]$  на отрезок  $[a, b]$

$$[-1, 1] \rightarrow [a, b] : x_i \rightarrow \frac{b - a}{2}x_i + \frac{a + b}{2}$$

Результаты Лагранжевой интерполяции для функции Рунге (18) на равно-

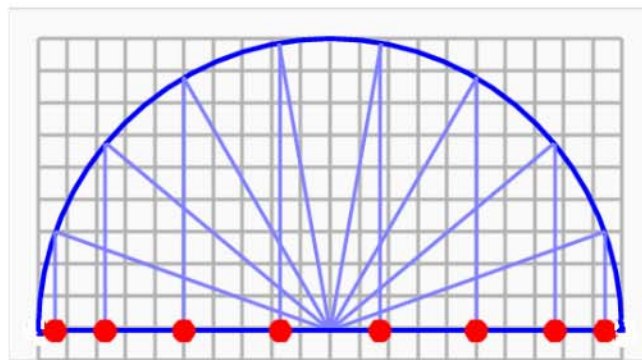


Рис. 7: Корни полинома Чебышева

мерной и Чебышевской сетке по 11 узлам представлены на рисунке 8. Максимальное отклонение между значением функции Рунге и значением интерполяционного полинома на рассматриваемом отрезке в случае Чебышевской

сетки примерно в 20 раз меньше по сравнению с отклонением, соответствующим равномерной сетке.

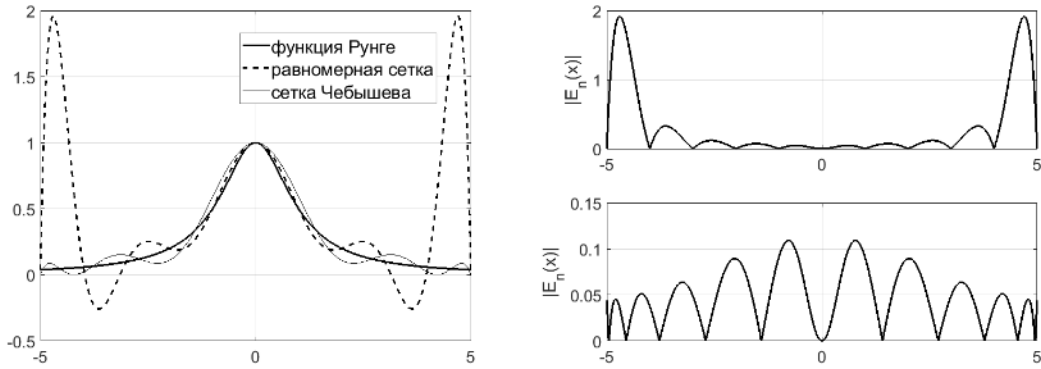


Рис. 8: Лагранжева интерполяция для функции Рунге на равномерной и Чебышевской сетке, 11 узлов (слева). Ошибка интерполяции на равномерной (справа, сверху) и Чебышевской (справа, снизу) сетках

## 2.3 Интерполяционный полином в форме Ньютона

Лагранжева форма интерполяционного полинома для некоторых задач является неудобной. Например, если качество интерполяции не устраивает и при этом есть возможность добавления одной или нескольких узловых точек с целью уменьшить ошибку, полином Лагранжа придётся строить ”с нуля”. В таких ситуациях удобна другая форма записи интерполяционного полинома: форма Ньютона. Интерполяционный полином в форме Ньютона использует такие понятия, как конечные и разделённые разности, определения и основные свойства которых представлены далее.

### 2.3.1 Конечные и разделённые разности

Пусть  $x^h = \{x_i\}_{i=0}^n$  - равномерная сетка, т.е.  $x_i = x_0 + ih$ . Тогда конечная разность 1-го порядка в узле  $x_k$ ,  $k = 0, \dots, n - 1$  определяется как

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k,$$

а конечная разность  $m$ -го порядка в узле  $x_k$

$$\Delta^m y_k = \Delta^{m-1} y_{k+1} - \Delta^{m-1} y_k.$$

*Пример.* Конечные разности 2-го и 3-го порядка:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta^1 y_1 - \Delta^1 y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0.$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = \dots$$

Если сетка  $x^h$  не является равномерной, то понятие конечной разности на ней определить не удастся. В таком случае можно говорить о разделённых разностях. Разделённая разность 1-го порядка, вычисленная по двум узлам  $x_{k_1}, x_{k_2}$ , есть

$$[y_{k_1}, y_{k_2}] = \frac{y_{k_2} - y_{k_1}}{x_{k_2} - x_{k_1}},$$

а разделённая разность  $m$ -го порядка, вычисленная по узлам  $x_{k_0}, \dots, x_{k_m}$

$$[y_{k_0}, \dots, y_{k_m}] = \frac{[y_{k_1}, \dots, y_{k_m}] - [y_{k_0}, \dots, y_{k_{m-1}}]}{x_{k_m} - x_{k_0}}.$$

Докажем утверждение, которое пригодится при выводе интерполяционной формулы Ньютона.

*Утверждение.* Разделённая разность  $n$ -го порядка равна

$$[y_{k_0}, \dots, y_{k_n}] = \sum_{j=0}^n \frac{y_{k_j}}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x_{k_j} - x_{k_i})}. \quad (19)$$

*Доказательство.* Воспользуемся методом математической индукции.

База индукции:  $[y_{k_0}, y_{k_1}] = \frac{y_{k_1} - y_{k_0}}{x_{k_1} - x_{k_0}} = \frac{y_{k_0}}{x_{k_0} - x_{k_1}} + \frac{y_{k_1}}{x_{k_1} - x_{k_0}}$ .

Индукционный переход. Пусть (19) верно для  $n = m - 1$ . Покажем, что (19) верно для  $n = m$

$$\begin{aligned} [y_{k_0}, \dots, y_{k_m}] &= \frac{[y_{k_1}, \dots, y_{k_m}] - [y_{k_0}, \dots, y_{k_{m-1}}]}{x_{k_m} - x_{k_0}} \\ &= \frac{1}{x_{k_m} - x_{k_0}} \left( \sum_{j=1}^m \frac{y_{k_j}}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m (x_{k_j} - x_{k_i})} - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{y_{k_j}}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m-1} (x_{k_j} - x_{k_i})} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Разобьём элементы в формуле (20) согласно номерам  $j$

$$1. \quad j = 0: -\frac{1}{x_{k_m} - x_{k_0}} \frac{y_{k_0}}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m-1} (x_{k_j} - x_{k_i})}$$

$$2. j = m: \frac{1}{x_{k_m} - x_{k_0}} \frac{y_{k_m}}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m-1} (x_{k_j} - x_{k_i})}$$

3.  $j \neq 0, j \neq m$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x_{k_m} - x_{k_0}} \left( \frac{y_{k_j}}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m (x_{k_j} - x_{k_i})} - \frac{y_{k_j}}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m-1} (x_{k_j} - x_{k_i})} \right) \\ &= \frac{y_{k_j}}{x_{k_m} - x_{k_0}} \left( \frac{(x_{k_j} - x_{k_0}) - (x_{k_j} - x_{k_m})}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^m (x_{k_j} - x_{k_i})} \right) \end{aligned}$$

Объединяя элементы в сумму, справедливость формулы (19) становится очевидной.

*Следствие.* Разделенная разность - симметричная функция своих аргументов.

Следующее утверждение устанавливает связь между конечными разностями и разделенными разностями в случае равномерной сетки.

*Утверждение.* Пусть  $x^h$  - равномерная сетка и  $x_i = x_0 + ih$ . Тогда

$$[y_0, \dots, y_m] = \frac{\Delta^m y_0}{m! h^m}, m \leq n. \quad (21)$$

*Доказательство.* База индукции:  $[y_0, y_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{1! h^1}$ .

Индукционный переход. Пусть (21) верно для  $n = m - 1$ . Покажем, что (21) верно для  $n = m$ .

$$[y_0, \dots, y_m] = \frac{[y_1, \dots, y_m] - [y_0, \dots, y_{m-1}]}{x_m - x_0} = \frac{\frac{\Delta^{m-1} y_1}{(m-1)! h^{m-1}} - \frac{\Delta^{m-1} y_0}{(m-1)! h^{m-1}}}{\underbrace{x_m - x_0}_{hm}}.$$

### 2.3.2 Интерполяционная форма Ньютона

Получим формулу интерполяционного полинома Ньютона на упорядоченной сетке. Будем строить полиномы Лагранжа  $L_0(x), L_1(x), \dots$ , последовательно

добавляя по одному узлу:

$$x_0 \rightarrow L_0(x) = y_0$$

$$x_0, x_1 \rightarrow L_1(x)$$

$$x_0, \dots, x_n \rightarrow L_n(x)$$

Очевидно выполнение следующего равенства (для компактности записи аргумент  $x$  опущен)

$$L_n = L_0 + (L_1 - L_0) + \dots + (L_n - L_{n-1}) = Q_0 + Q_1 + \dots + Q_n, \quad (22)$$

где  $Q_k(x) = L_k(x) - L_{k-1}(x)$ .

Определим вид полиномов  $Q_k(x)$ . Заметим, что корнями полинома  $Q_k(x)$  являются узлы  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ , поэтому  $Q_k(x)$  можно записать в следующем виде

$$Q_k(x) = \gamma_k \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i), \quad (23)$$

где  $\gamma_k$  - некоторый (пока неизвестный) множитель. Определим  $\gamma_k$ , выполнив следующие выкладки

$$Q_k(x_k) = \gamma_k \prod_{i=0}^{k-1} (x_k - x_i) = L_k(x_k) - L_{k-1}(x_k)$$

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{1}{\prod_{i=0}^{k-1} (x_k - x_i)} \left( y_k - \sum_{j=0}^{k-1} y_j \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{k-1} \frac{x_k - x_i}{x_j - x_i} \right) \\ &= \frac{y_k}{\prod_{i=0}^{k-1} (x_k - x_i)} - \sum_{j=0}^{k-1} y_j \frac{1}{\prod_{i=0}^{k-1} (x_k - x_i)} \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{k-1} (x_k - x_i)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{k-1} (x_j - x_i)} \\ &= \frac{y_k}{\prod_{i=0}^{k-1} (x_k - x_i)} + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{y_j}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^k (x_j - x_i)}. \end{aligned}$$

Используя равенство (19), получим

$$\gamma_k = [y_0, \dots, y_k]. \quad (24)$$

Тогда с учётом (22), (23) и (24) интерполяционный полином в форме Ньютона  $P_n(x)$

$$P_n(x) = y_0 + [y_0, y_1](x - x_0) + [y_0, y_1, y_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + [y_0, \dots, y_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i). \quad (25)$$

Стоит уточнить, что данная форма записи называется интерполяционным многочленом Ньютона с разделёнными разностями для интерполяции вперёд. Приведём (без вывода) формулу для интерполяции назад

$$P_n(x) = y_n + [y_n, y_{n-1}](x - x_n) + [y_n, y_{n-1}, y_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + [y_n, \dots, y_0](x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1). \quad (26)$$

Сравнивая две формы интерполяционного полинома: форму Лагранжа (9) и форму Ньютона (25), можно сделать следующие замечания в пользу той или иной формы:

- Если задача интерполяции ставится для нескольких функций, но на одной и той же сетке, то интерполяционный полином в форме Лагранжа является предпочтительным.
- Если задача рассматривается для одной и той же функции, но сетка меняется путём добавления новых узлов к уже имеющимся, то использование формы Ньютона более целесообразно.

Например, если полином Ньютона  $P_n(x)$  построен по сетке  $\{x_i\}_{i=0}^n$  и сеточной функции  $\{y_i\}_{i=0}^n$ , то добавление новой точки  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  не потребует вычисления полинома  $P_{n+1}(x)$  "с нуля". Достаточно добавить к  $P_n(x)$  лишь одно слагаемое

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + [y_0, \dots, y_n, y_{n+1}] \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad (27)$$

Получим формулу остаточного члена формулы Ньютона. Пусть  $\{x_i\}_{i=0}^n$  - узлы интерполяции,  $\{y_i\}_{i=0}^n$  - сеточная функция, соответствующая функции  $y(x)$ , а  $P_n(x)$  - интерполяционный полином в форме Ньютона, построенный по этим данным. Пусть  $x^* \neq x_i$  - точка, в которой производится оценка погрешности,  $y^*$  - значение функции  $y(x)$  в точке  $x^*$ . Дополним табличную функцию точкой  $(x^*, y^*)$  и построим интерполяционный полином в форме

Ньютона  $P_{n+1}(x)$ . Тогда согласно (27)

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + [y_0, \dots, y_n, y^*] \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Заменяя  $x$  на  $x^*$  и учитывая, что  $P_{n+1}(x^*) = y^*$ , получим выражение для ошибки в точке  $x = x^*$

$$R_n(x^*) = y^* - P_n(x^*) = [y_0, \dots, y_n, y^*] \omega(x^*).$$

Получим интерполяционную формулу Ньютона для случая равных промежутков. Пусть  $x^h$  - упорядоченная равномерная сетка:  $x_i = x_0 + ih, i = 0, \dots, n, h > 0$ . Введём безразмерную переменную  $t = \frac{x-x_0}{h}$  и воспользуемся формулой (21)

$$P_n(x) = P_n(x_0 + th) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! h} h(t - 0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} h(t - 0)h(t - 1) + \dots$$

Тогда интерполяционная формула Ньютона с конечными разностями для интерполяции вперед есть

$$P_n(x_0 + th) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t - 1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t - 1) \dots (t - n + 1).$$

Подобным образом можно получить интерполяционную формулу Ньютона для интерполяции назад

$$P_n(x_n + qh) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!} q + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} q(q + 1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} q(q + 1) \dots (q + n - 1),$$

где  $q = (x - x_n)/h$ . Заметим, что при интерполировании назад  $q$  будет всегда отрицательно.

## 2.4 Интерполяция с кратными узлами. Полином Эрмита

Лагранжева полиномиальная интерполяция может быть обобщена на случай, когда в узлах известны не только значения функции, но и значения её производных.

Узел  $x_i \in x^h$  называется кратным узлом порядка  $p$  для сеточной функции  $y_h$ , если в этом узле заданы  $p$  значений:  $(y_i, y'_i, \dots, y_i^{(p-1)})$ , где  $y_i^{(k)}$  - производная порядка  $k$ . Простейшим случаем является полином Эрмита, у которого

все узлы имеют кратность 2, т.е. полином  $P_m(x)$  удовлетворяет следующим условиям

$$\begin{cases} P_m(x_i) = y_i \\ P'_m(x_i) = y'_i, i = 0, \dots, n \end{cases} \quad (28)$$

Поскольку количество условий  $2n + 2$ , то можно построить полином степени  $m = 2n + 1$ . Будем искать полином Эрмита  $H_{2n+1}(x)$  в следующем виде

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^n (y_j \phi_j(x) + y'_j \psi_j(x)), \quad (29)$$

где  $\phi_j(x)$  и  $\psi_j(x)$  - базисные полиномы Эрмита степени не выше  $2n + 1$ . Условия на  $\phi_j(x)$  и  $\psi_j(x)$

$$\begin{cases} \phi_j(x_i) = \delta_{ij} \\ \phi'_j(x_i) = 0, \forall i \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \psi_j(x_i) = 0, \forall i \\ \psi'_j(x_i) = \delta_{ij} \end{cases} \quad (30)$$

будут гарантировать выполнение условий (28). На основании (30) можно сделать вывод, что каждый базисный полином имеет  $n$  корней кратности 2 и один корень кратности 1.

Получим формулы для  $\psi_j(x)$  и  $\phi_j(x)$ . Для полинома  $\psi_j(x)$  узел  $x_j$  является корнем кратности 1, а все остальные узлы сетки - корнями кратности 2, поэтому

$$\psi_j(x) = \gamma_j (x - x_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x - x_i)^2,$$

где  $\gamma_j$  - неизвестный числовой множитель. Определим  $\gamma_j$ , проделав следующие выкладки

$$\psi'_j(x) = \gamma_j \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x - x_i)^2 + \gamma_j (x - x_j) \left( \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x - x_i)^2 \right)'_x$$

$$\psi'_j(x_j) = \gamma_j \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x_j - x_i)^2 = 1 \Rightarrow \gamma_j = \frac{1}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x_j - x_i)^2}$$

Тогда полином  $\psi_j(x)$  имеет следующий вид

$$\psi_j(x) = (x - x_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \left( \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right)^2.$$



Все узлы сетки кроме  $x_j$  являются корнями кратности 2 для полинома  $\phi_j(x)$

$$\phi_j(x) = (\alpha_j x + \beta_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \left( \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right)^2.$$

Для определения неизвестных констант  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  выполним последовательность преобразований  $\phi_j(x_j) = 1 \Rightarrow \alpha_j x_j + \beta_j = 1$

$$\phi_j'(x) = \alpha_j \Pi + (\alpha_j x + \beta_j) (\Pi)'_x, \text{ где для краткости } \Pi = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \left( \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right)^2$$

$$\phi_j'(x_j) = \alpha_j + (\Pi)'_{x=x_j} = 0 \Rightarrow \alpha_j = -(\Pi)'_{x=x_j}$$

$$\left( \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \left( \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right)^2 \right)'_x = \left( \frac{2(x - x_0)}{(x_j - x_0)^2} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \left( \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right)^2 + \dots + \frac{2(x - x_k)}{(x_j - x_k)^2} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j \\ i \neq k}}^n \left( \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right)^2 + \dots \right)$$

$$\alpha_j = -(\Pi)'_{x=x_j} = - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{2}{x_j - x_k}$$

$$\beta_j = 1 - \alpha_j x_j \Rightarrow \alpha_j x + \beta_j = \alpha_j x + (1 - \alpha_j x_j) = 1 + \alpha_j (x - x_j)$$

Получаем выражением для полинома  $\phi_j(x)$

$$\phi_j(x) = \left( 1 - 2(x - x_j) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{x_j - x_k} \right) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \left( \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right)^2.$$

По построению интерполяционный полином Эрмита существует (при выполнении определённых требований к узлам сетки). Покажем единственность.

Доказательство проведём от противного. Пусть существуют  $H_{2n+1}^{(1)}(x)$  и  $H_{2n+1}^{(2)}(x)$ , которые удовлетворяют условиям (28). Тогда полином  $Q_{2n+1}(x) = H_{2n+1}^{(1)}(x) - H_{2n+1}^{(2)}(x)$  имеет  $n + 1$  корень кратности 2. Но  $Q_{2n+1}(x)$  - полином степени не выше  $2n + 1 \Rightarrow Q_{2n+1}(x) \equiv 0$ .

Об ошибке интерполяции в случае полинома Эрмита говорит следующая теорема.

*Теорема.* Если  $f(x) \in C^{(2n+2)}([a, b])$ , то справедлива формула для остаточного члена полинома Эрмита

$$R_{2n+2}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n + 2)!} \omega^2(x), \quad (31)$$

где  $\eta \in [a, b]$ ,  $\omega(x)$  - корневой полином.

Если узлы имеют разную кратность, то можно сделать следующие замечания:

1. Техника построения интерполяционного полинома с узлами разной кратности аналогична, но необходимо учесть кратность узлов.
2. Пусть сетка имеет  $N = N_0 + N_1 + \dots + N_n$  узлов с учётом их кратности ( $N_i$  - кратность  $i$ -го узла). Тогда можно построить интерполяционный полином степени  $N-1$ . Если  $f(x) \in C^{(N)}([a, b])$ , то формула остаточного члена будет иметь вид

$$R_{N-1}(x) = \frac{f^{(N)}(\eta)}{N!} \Omega(x),$$

где  $\Omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)^{N_i}$  - корневой полином с учётом кратности узлов.

*Пример.* На рисунке 9 представлены полином Лагранжа и полином Эрмита, которые интерполируют функцию  $f(x) = \sin(4\pi x)$  на интервале  $[0, 1]$  по 4 равноотстоящим узлам. Учёт значений производных позволяет существенно повысить качество приближения (по сравнению с Лагранжевой интерполяцией) при сохранении количества узлов и их расположения.

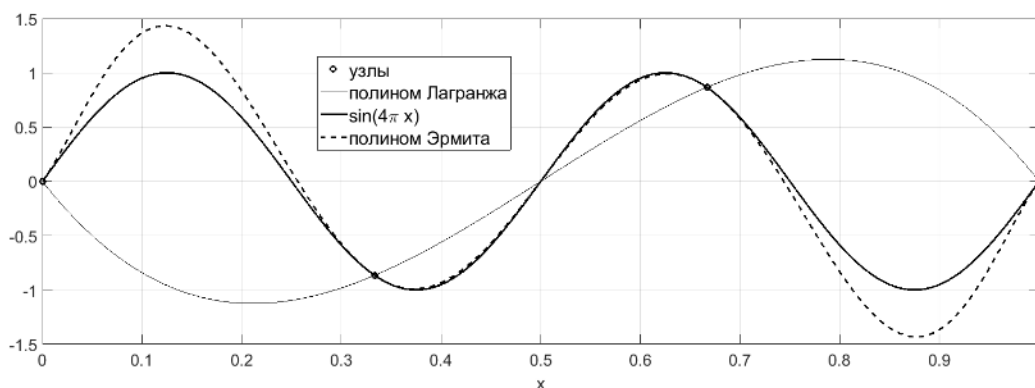


Рис. 9: Лагранжева и Эрмитова интерполяция для функции  $f(x) = \sin(4\pi x)$  на равномерной сетке по 4 узлам

Интересно посмотреть, как ошибка интерполяции ведёт себя с увеличением количества узлов как для полинома Лагранжа, так и для полинома Эрмита. Под ошибкой в данном случае будем понимать максимальное отклонение интерполяционного полинома от функции, взятое по модулю. Получившаяся зависимость представлена на рисунке 10. Для обоих полиномов наблюдается рост ошибки, начиная с некоторого количества узлов. Однако в случае полинома Эрмита скорость убывания и скорость роста ошибки выше. Большая скорость убывания обусловлена более высокой точностью полинома Эрмита

за счёт учёта производных. Большая скорость роста является результатом того, что ошибка быстрее накапливается из-за большего количества слагаемых, входящих в выражение для полинома Эрмита, по сравнению с полиномом Лагранжа.

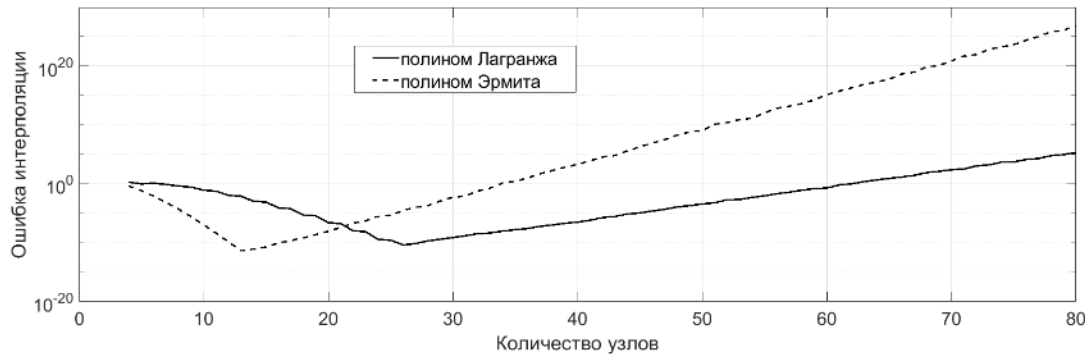


Рис. 10: Зависимость максимальной ошибки от количества узлов для функции  $f(x) = \sin(4\pi x)$  на равномерной сетке в случае полинома Лагранжа и полинома Эрмита

## 2.5 О сходимости интерполяционного процесса

В заключении разговора о полиномиальной интерполяции обсудим несколько моментов, связанных со сходимостью интерполяционного процесса. Всегда ли можно добиться повышения точности интерполяции путем увеличения числа узлов? Пусть стратегия выбора узлов задаётся в виде бесконечной матрицы узлов интерполяции

$$X = \begin{pmatrix} x_0^{(0)} & & & \\ x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & & \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \\ \dots & \dots & \dots & \\ x_0^{(n)} & x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, x_i^{(k)} \in [a, b],$$

где каждая строка в таблице - это набор узлов сетки (узлы различны). Верхний индекс у  $x_i^{(k)}$  равен количеству узлов сетки за вычетом единицы, а нижний индекс - порядковый номер узла. По каждой сетке  $X_n$  ( $X_n$  -  $n$ -я строка матрицы  $X$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ) можно построить интерполяционный многочлен  $P_n(x)$ , интерполирующий заданную функцию  $f(x)$ . Говоря о сходимости интерполяционного процесса, ищут ответ на вопрос о сходимости после-

довательности интерполяционных многочленов  $\{P_n(x)\}$  к функции  $f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Как правило, рассматривается два типа сходимости: равномерная и поточечная.

1. Для фиксированной последовательности сеток  $\{X_n\}$  последовательность интерполяционных многочленов  $\{P_n(x)\}$  сходится поточечно к функции  $f(x)$  на  $[a, b]$ , если

$$P_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x) \text{ для любого } x \in [a, b].$$

2. Для фиксированной последовательности сеток  $\{X_n\}$  последовательность интерполяционных многочленов  $\{P_n(x)\}$  сходится равномерно к функции  $f(x)$  на  $[a, b]$ , если

$$\max_{[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (32)$$

Равномерная сходимость является более сильным видом сходимости: если функциональная последовательность сходится равномерно, то эта последовательность также сходится и поточечно, но не наоборот.

Результаты, представленные на рисунке 8, говорят о том, что для функции Рунге равномерное распределение узлов сетки не обеспечивает равномерную сходимость интерполяционного процесса (по причине значительных осцилляций ближе к концам интервала). Однако численные эксперименты показывают, что имеет место поточечная сходимость на интервале  $[-3.63, 3.63]$  [1]. Если отдать предпочтение сетке Чебышева, то равномерная сходимость будет иметь место. Напрашивается следующий вопрос: существует ли единая для всех непрерывных на  $[a, b]$  функций стратегия выбора узлов, гарантирующая сходимость? Ответ на этот вопрос даёт теорема Фабера, которая отрицает существование единой для всех непрерывных функций стратегии выбора узлов, обеспечивающей сходимость интерполяционного процесса.

*Теорема Фабера.*  $\forall X \exists f \in C([a, b]): \max_{[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty.$

Однако для гладких функций такую стратегию можно указать, о чём говорит следующая теорема.

*Теорема.* Пусть  $X$  - матрица с узлами Чебышева. Тогда  $\forall f \in C^{(1)}([a, b])$  справедливо (32).

Подводя итог, можно сказать, что в общем случае свойство сходимости или расходимости интерполяционного процесса зависит как от выбора на  $[a, b]$

матрицы узлов (последовательности сеток), так и от гладкости интерполируемой функции  $f(x)$ .

## 2.6 Лабораторная работа

### 2.6.1 Задание

Дана функция. Выбрать для этой функции отрезок непрерывности и построить на нем сетку и сеточную функцию. Сетка может быть равномерной или Чебышевской. Полученный набор точек интерполировать одним из полиномов.

- (a) полином Лагранжа
- (b) полином Ньютона слева-направо
- (c) полином Ньютона справа-налево
- (d) полином Эрмита

### 2.6.2 Возможные варианты исследований

Базовые исследования.

1. Для небольшого числа узлов (2..10) построить график полинома и функции. На графике отметить узлы.
2. Для небольшого числа узлов (2..10) построить график фактической ошибки: разности между функцией и полиномом. На графике отметить узлы.
3. Построить зависимость максимальной ошибки от числа узлов. Максимальную ошибку вычислять в серединах между узлами.

Дополнительные исследования.

4. Построить зависимость координаты максимальной ошибки от числа узлов.
5. На основе заданной функции построить функцию с разрывом первой производной. Сравнить интерполяцию двух функций.

6. Модифицировать сетку таким образом, чтобы ошибка уменьшилась для некоторого числа узлов. Сравнить интерполяцию на двух сетках.
7. Для фиксированного числа узлов построить график теоретической ошибки. Сравнить фактическую и теоретическую ошибки.
8. Выполнить базовые исследования с помощью MATLAB-функции *polyfit*. Сравнить полученные результаты. Воспользоваться центрированием и масштабированием независимой переменной. Как это повлияло на матрицу Вандермонда? Как это повлияло на итоговый результат? Изучить алгоритм функции *polyfit*.

### 2.6.3 Варианты функций

№	Функция	№	Функция
1	$f(x) = x - \sin x - 0.25$	13	$f(x) = x \ln(x + 1)$
2	$f(x) = x^3 - e^x + 1$	14	$f(x) = x^2 - \sin 10x$
3	$f(x) = \sqrt{x} + \cos x$	15	$f(x) = \operatorname{ctg} x - x$
4	$f(x) = x^2 + 1 - \arccos x$	16	$f(x) = \operatorname{tg} 3x + 0.4 - x^2$
5	$f(x) = \lg x + \frac{7}{2x+6}$	17	$f(x) = x^2 + 1 - \operatorname{tg} x$
6	$f(x) = \operatorname{tg}(0.5x + 0.2) - x^2$	18	$f(x) = x^2 - 1 - \ln x$
7	$f(x) = 3x - \cos x - 1$	19	$f(x) = 0.5^x + 1 - (x - 2)^2$
8	$f(x) = x + \lg x + 0.5$	20	$f(x) = (x + 3) \cos x - 1$
9	$f(x) = x^2 - \arcsin(x - 0.2)$	21	$f(x) = x^2 \cos 2x + 1$
10	$f(x) = x^2 + 4 \sin x - 2$	22	$f(x) = \cos(x + 0.3) - x^2$
11	$f(x) = \operatorname{ctg} x + x^2$	23	$f(x) = 2^x(x - 1)^2 - 2$
12	$f(x) = \operatorname{tg} x - \cos x + 0.1$	24	$f(x) = x \ln(x + 1) - 0.5$

### 2.6.4 Примеры выполнения работы

В качестве примера рассмотрим приближение функции  $f(x) = x + \ln(x + 2.1)$  на отрезке  $[-2, 1]$  полиномом Лагранжа по четырем узлам равномерной сетки ( $n = 3$ ). Построим сетку и сеточную функцию

$h = \frac{(b-a)}{n}$	$i$	$x_i = a + i * h$	$y_i = f(x_i)$
$h = \frac{(1+2)}{3} = 1$	0	$x_0 = a = -2.0$	$y_0 = f(-2.0) = -4.3026$
	1	$x_1 = a + h = -1.0$	$y_1 = f(-1.0) = -0.9047$
	2	$x_2 = a + 2h = 0.0$	$y_2 = f(0.0) = 0.7419$
	3	$x_3 = a + 3h = 1.0$	$y_3 = f(1.0) = 2.1314$

Теперь, применяя формулу (9), получаем полином в форме Лагранжа

$$\begin{aligned}
 L_3(x) &= \sum_{i=0}^3 y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^3 \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \\
 &= -4.3026 \frac{(x+1)x(x-1)}{(-2+1)(-2)(-2-1)} - 0.9047 \frac{(x+2)x(x-1)}{(-1+2)(-1)(-1-1)} \\
 &\quad + 0.7419 \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{(0+2)(0+1)(0-1)} + 2.1314 \frac{(x+2)(x+1)x}{(1+2)(1+1)1} \\
 &= 0.2490x^3 - 0.1286x^2 + 1.2690x + 0.7419
 \end{aligned}$$

Для проверки вычислим значения полученного полинома в узлах. Также, вычислим ошибку  $\delta_k = f(x_k) - L(x_k)$  в серединах между узлами.

$i$	$x_i$	$L(x_i)$	$\delta_i$	$x_{i+\frac{1}{2}}$	$f(x_{i+\frac{1}{2}})$	$L(x_{i+\frac{1}{2}})$	$\delta_{i+\frac{1}{2}}$
0	-2	-4.3025	-0.0001	-1.5	-2.0108	-2.2913	0.2805
1	-1	-0.9047	0.0000	-0.5	-0.0300	0.0441	-0.0741
2	0	0.7419	0.0000	0.5	1.4555	1.3754	0.0801
3	1	2.1313	0.0001				

В качестве ещё одного примера рассмотрим приближение функции  $f(x) = x + \ln(x + 2.1)$  на отрезке  $[-2, 2]$  полиномом Ньютона справа-налево по четырём узлам неравномерной сетки. Построим сетку и сеточную функцию

$i$	$x_i$	$h_i = x_i - x_{i-1}$	$y_i = f(x_i)$
0	$x_0 = a = -2.0$		$y_0 = f(-2.0) = -4.3026$
1	$x_1 = -1.0$	1	$y_1 = f(-1.0) = -0.9047$
2	$x_2 = 0.0$	1	$y_2 = f(0.0) = 0.7419$
3	$x_3 = 2.0$	2	$y_3 = f(2.0) = 3.4110$

Предварительно вычислим необходимые разделённые разности

$$\begin{aligned}
 [y_1, y_0] &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{-0.9047 - (-4.3026)}{-1.0 - (-2.0)} = 3.3979 \\
 [y_2, y_1] &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0.7419 - (-0.9047)}{0.0 - (-1.0)} = 1.6466 \\
 [y_3, y_2] &= \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{3.4110 - 0.7419}{2.0 - 0.0} = 1.3346 \\
 [y_2, y_1, y_0] &= \frac{[y_2, y_1] - [y_1, y_0]}{x_2 - x_0} = \frac{1.6466 - 3.3979}{0.0 - (-2.0)} = -0.8756 \\
 [y_3, y_2, y_1] &= \frac{[y_3, y_2] - [y_2, y_1]}{x_3 - x_1} = \frac{1.3346 - 1.6466}{2 - (-1)} = -0.1040 \\
 [y_3, y_2, y_1, y_0] &= \frac{[y_3, y_2, y_1] - [y_2, y_1, y_0]}{x_3 - x_0} = \frac{-0.1040 - (-0.8756)}{2 - (-2)} = 0.1929
 \end{aligned}$$

Разделённые разности удобно расположить в таблице

$i$	$x_i$	$y_i$	$[y_{i+1}, y_i]$	$[y_{i+2}, y_{i+1}, y_i]$	$[y_3, y_2, y_1, y_0]$
0	-2.0	-4.3026	3.3979	-0.8756	<u>0.1929</u>
1	-1.0	-0.9047	1.6466	<u>-0.1040</u>	
2	0.0	0.7419	<u>1.3346</u>		
3	2.0	<u>3.4110</u>			

Теперь, согласно формуле (26), получаем интерполяционный полином Ньютона, используя подчеркнутые разности из построенной таблицы

$$\begin{aligned}
 P_3(x) &= \sum_{i=0}^3 [y_3, \dots, y_i] \prod_{j=i+1}^3 (x - x_j) \\
 &= 3.4110 + 1.3346(x - 2) - 0.1040(x - 2)(x - 0) \\
 &\quad + 0.1929(x - 2)(x - 0)(x - (-1)) \\
 &= 0.1929x^3 - 0.2969x^2 + 1.1568x + 0.7418
 \end{aligned}$$

Заданная функция, полученный полином Ньютона и их разность (по модулю) показаны на рисунке 11. Также на графиках круглыми маркерами отмечены узлы, по которым построен полином.

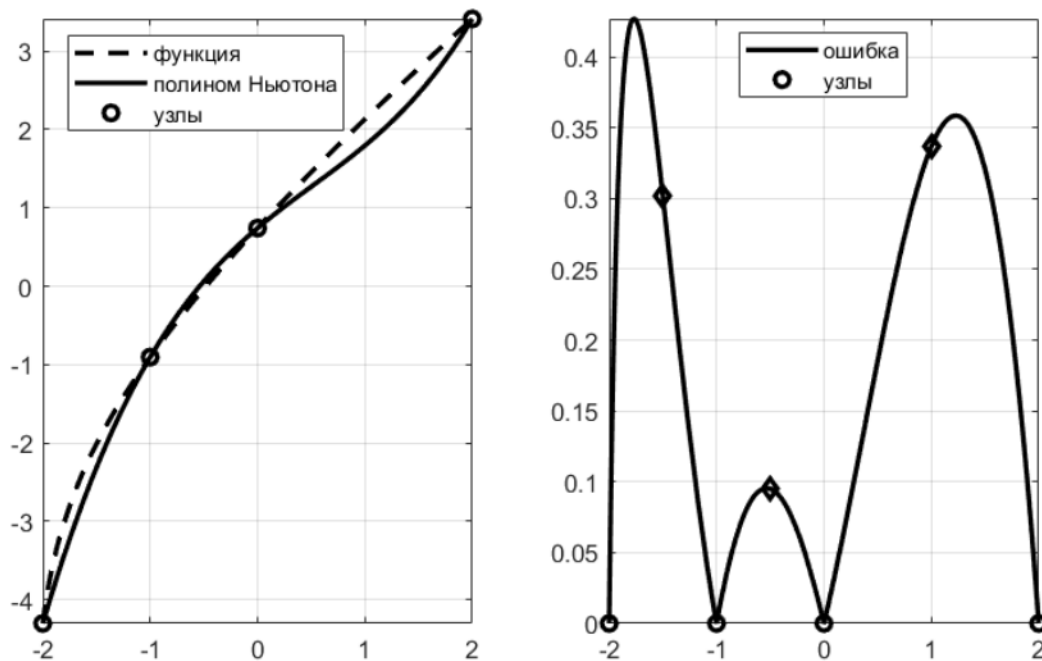


Рис. 11: Графики функции и полинома Ньютона (слева). График ошибки интерполяции (справа)



Для проверки вычислим значения полученного полинома в узлах. Также определим ошибку  $\delta_k = f(x_k) - P_3(x_k)$  в серединах между узлами. На графике ошибки (рисунок 11, справа) эти точки отмечены ромбами.

$i$	$x_i$	$P_3(x_i)$	$\delta_i$	$x_{i+\frac{1}{2}}$	$f(x_{i+\frac{1}{2}})$	$P_3(x_{i+\frac{1}{2}})$	$\delta_{i+\frac{1}{2}}$
0	-2.0	-4.3026	0.0000	-1.5	-2.0108	-2.3125	0.3016
1	-1.0	-0.9048	0.0001	-0.5	-0.0300	0.0651	-0.0951
2	0.0	0.7418	0.0001	1.0	2.1314	1.7946	0.3368
3	2.0	3.4110	0.0000				

### 3 Приближение табличных функций сплайнами

Как было видно выше полиномиальная интерполяция имеет ряд ограничений:

- в случае равномерной сетки ошибка интерполяции возрастает при увеличении количества узлов;
- не всегда имеет место сходимоть;
- для любой последовательности сеток найдётся непрерывная функция, для которой интерполяционный процесс расходится (теорема Фабера).

Альтернативой данному подходу является кусочно-полиномиальная интерполяция, а именно, интерполяция сплайнами. Дадим строгое определение сплайна.

*Определение.* Пусть  $x_0, \dots, x_n$  - различные точки отрезка  $[a, b]$ , причём  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Тогда функция  $S_k^\nu(x)$ , определённая на интервале  $[a, b]$ , называется сплайном степени  $k$  дефекта  $\nu$ , если

$$S_k^\nu|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_k, i = 0, 1, \dots, n - 1$$

$$S_k^\nu \in C^{k-\nu}([a, b]).$$

*Замечание.* Во внутренних узлах  $x_1, \dots, x_{n-1}$  допускается разрыв производных порядка  $k - \nu + 1, \dots, k$ .

Существуют как интерполяционные, так и сглаживающие сплайны (рисунок 12). Использование того или иного типа сплайна зависит от специфики решаемой задачи.

1. Интерполяционный сплайн в узлах сетки совпадает с соответствующими значениями сеточной функции (функция `spline` в MATLAB):

$$S_k^\nu(x_i) = f(x_i), i = 0, \dots, n$$

2. Сглаживающий сплайн целесообразно использовать, если исходные данные заведомо содержат ошибки (функция `csaps` в MATLAB).

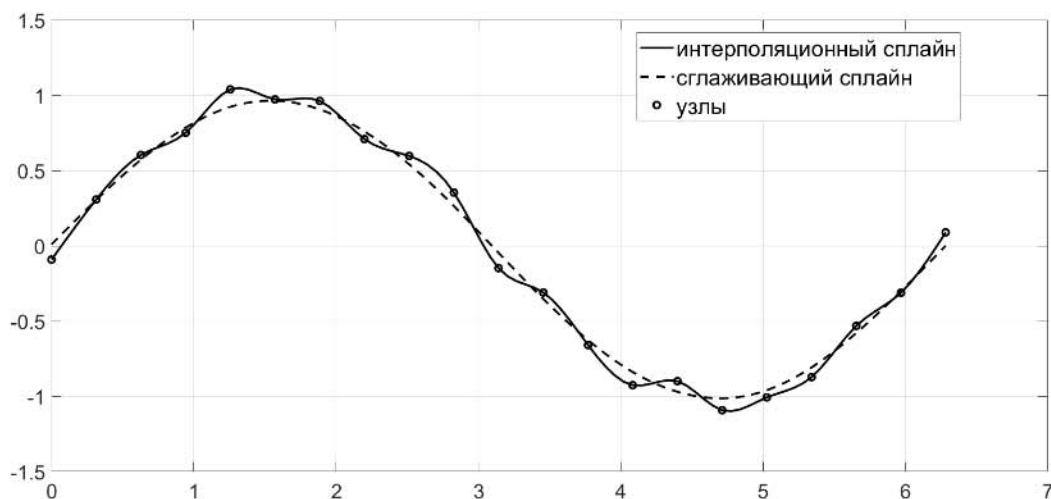


Рис. 12: Интерполяционный и сглаживающий сплайны

Пример простейшего сплайна - это ломаная линия, которая соединяет точки на плоскости (рисунок 13, справа). Очевидно, что в таком случае сплайн - это кусочно-линейная функция, которая на каждом отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  определяется следующим образом

$$S_1^1(x)|_{[x_i, x_{i+1}]} = P_1(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i), i = 0, \dots, n - 1$$

Дефект такого сплайна равен 1, поскольку во внутренних узлах первая производная не существует, а имеет место только непрерывность сплайна.

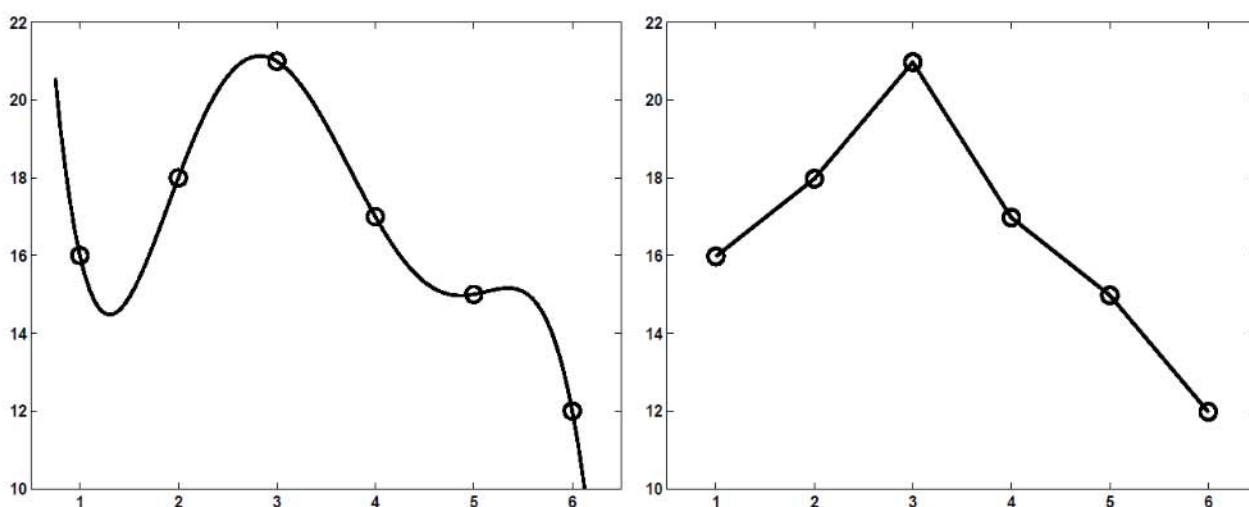


Рис. 13: Интерполяционный полином (слева) и линейный сплайн дефекта 1 (справа)

### 3.1 Эрмитова интерполяция

Если в каждой точке сетки  $\{x_i\}$  известны как значение функции  $\{y_i\}$ , так и значение её первой производной  $\{y'_i\}$ , то на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  можно построить интерполяционный полином Эрмита третьей степени  $H_3(x)$

$$\begin{cases} H_3(x_i) = y_i, H_3(x_{i+1}) = y_{i+1} \\ H'_3(x_i) = y'_i, H'_3(x_{i+1}) = y'_{i+1} \end{cases}$$

Для этого достаточно воспользоваться формулой (29). Совокупность данных полиномов Эрмита образует кубический интерполяционный сплайн  $S_3^2(x)$ , дефект которого равен 2. Его называют эрмитовым локальным сплайном. Локальность обусловлена тем, что каждый из многочленов строится независимо от остальных. Это даёт преимущество, в частности, если число элементарных промежутков  $[x_i, x_{i+1}]$  велико.

Если значения первых производных в узлах неизвестны, то их можно оценить численно. Один из возможных способов оценки производных лежит в основе кубического Эрмитова сплайна, сохраняющего форму (shape-preserving piecewise cubic Hermite interpolation). Пусть  $\delta_i$  - разделенная разность первого порядка  $[y_i, y_{i+1}]$ , а  $d_i$  - приближённое значение производной  $y'_i$ . Значения  $d_i$  определяются следующим образом:

- если  $\delta_{i-1}$  и  $\delta_i$  имеют противоположные знаки или одно из значений равно 0, то  $d_i = 0$
- если  $\delta_{i-1}$  и  $\delta_i$  имеют одинаковые знаки и длины элементарных промежутков  $[x_{i-1}, x_i]$  и  $[x_i, x_{i+1}]$  равны, то

$$\frac{1}{d_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\delta_{i-1}} + \frac{1}{\delta_i} \right)$$

Рисунок 14 иллюстрирует описанные правила оценки значений производных. Аппроксимация производных в первой и последней точках выполняется иначе. Подробно об этом написано в [13].

### 3.2 Интерполирование квадратичными сплайнами

Разберём несколько способов построения квадратичного интерполяционного сплайна  $S_2^1(x)$ . На каждом элементарном промежутке он является полиномом второй степени, т.е.  $S_2^1|_{[x_{i-1}, x_i]} = g_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$ . Для того, чтобы

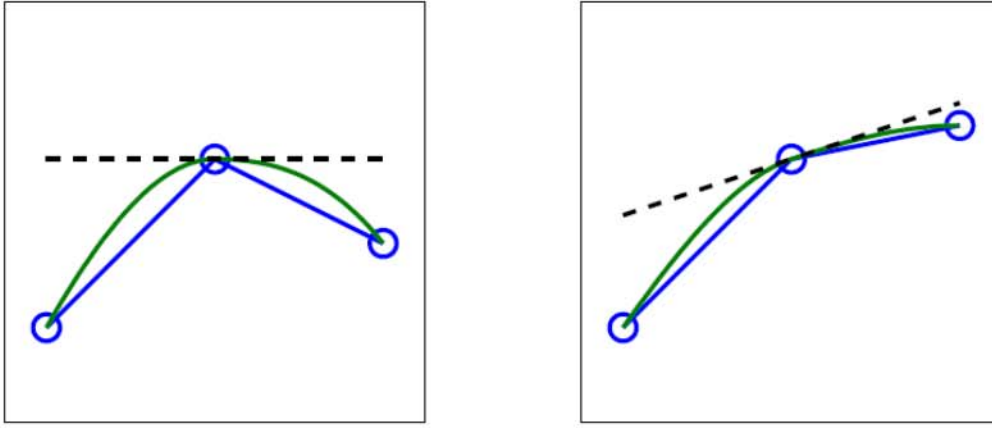


Рис. 14: Кубический Эрмитов сплайн, сохраняющий форму. Оценка значений производных в узловых точках

сплайн был интерполяционным и имел дефект 1, необходимо потребовать выполнение следующих условий

$$\begin{cases} g_i(x_{i-1}) = y_{i-1} \\ g_i(x_i) = y_i \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \quad \text{и} \quad g'_i(x_i) = g'_{i+1}(x_i), \quad i = 1, \dots, n - 1$$

Количество неизвестных коэффициентов равно  $3n$  в то время, как количество уравнений -  $3n - 1$ , т.е. необходимо задать 1 дополнительное условие. Один из вариантов - задать значение первой производной сплайна на левом конце промежутка, т.е. положить  $g'_1(x_0) = d_0$ . Тогда становится возможным определить все коэффициенты полинома  $g_1(x)$ . После этого значение первой производной полинома  $g_2(x)$  на левом конце второго элементарного промежутка  $[x_1, x_2]$  можно найти, а значит и определить все его коэффициенты. Описанная цепочка рассуждений записана в виде формул ниже

$$\begin{cases} g_1(x_0) = y_0 \\ g_1(x_1) = y_1 \\ g'_1(x_0) = d_0 \end{cases} \Rightarrow a_1, b_1, c_1 \Rightarrow g'_1(x_1) \Rightarrow \begin{cases} g_2(x_1) = y_1 \\ g_2(x_2) = y_2 \\ g'_2(x_1) = g'_1(x_1) \end{cases} \Rightarrow a_2, b_2, c_2 \Rightarrow \dots$$

Действуя таким образом, можно последовательно определить все полиномы  $g_i(x)$  и построить квадратичный сплайн. Стоит заметить, что значение первой производной можно задать в любой узловой точке сетки. Если производная задаётся на правом конце промежутка, то полиномы  $g_i(x)$  определяются в обратном порядке. При задании производной во внутренней узловой точке  $x_k$  ( $k = 1, n - 1$ ) коэффициенты полиномов вычисляются, двигаясь последовательно от точки  $x_k$  справа налево и слева направо.

Если задать значение первой производной не представляется возможным, то можно построить квадратичный сплайн с пропадающим узлом. В качестве пропадающего узла может выступать любой внутренний узел  $x_k$  ( $k = 1, n-1$ ). Пусть для определённости  $x_k = x_1$ . Тогда условие отсутствия узла имеет вид  $g_1''(x_1) = g_2''(x_1)$ , что равносильно тождественному равенству полиномов  $g_1(x)$  и  $g_2(x)$ . Данный факт позволяет определить коэффициенты  $g_1(x)$ , используя условия интерполяции в первых трёх узлах сетки. После этого можно определить значение первой производной полинома  $g_3(x)$  на левом конце третьего элементарного промежутка  $[x_2, x_3]$  и воспользоваться первым способом построения квадратичного сплайна. Данные рассуждения записаны ниже в виде формул

$$\begin{cases} g_1(x_0) = y_0 \\ g_1(x_1) = y_1 \\ g_1(x_2) = y_2 \end{cases} \Rightarrow a_1, b_1, c_1 \Rightarrow g_1'(x_2) \Rightarrow \begin{cases} g_3(x_2) = y_2 \\ g_3(x_3) = y_3 \\ g_3'(x_2) = g_1'(x_2) \end{cases} \Rightarrow a_3, b_3, c_3 \Rightarrow \dots$$

Существуют и другие способы построения квадратичного сплайна.

### 3.3 Интерполяционный кубический сплайн

Классикой в интерполяции сплайнами является кубический интерполяционный сплайн дефекта 1  $S_3^1(x)$ , который по сравнению с кубическим сплайном Эрмита имеет повышенную степень гладкости, т.е.  $S_3^1(x) \in C^2([a, b])$ . На каждом элементарном отрезке сплайн  $S_3^1(x)$  - это полином третьей степени

$$S_3^1(x) = \begin{cases} a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1, & x \in [x_0, x_1] \\ a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2, & x \in [x_1, x_2] \\ \dots \\ a_nx^3 + b_nx^2 + c_nx + d_n, & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Задача построения сплайна заключается в определении  $4n$  коэффициентов  $a_i, b_i, c_i$  and  $d_i, i = 1, \dots, n$ . Перед началом проведения выкладок введём следующие обозначения

$$g(x) := S_3^1(x) \text{ и } g_i(x) := S_3^1(x)|_{[x_{i-1}, x_i]}.$$

Поскольку  $g(x) \in C^2([a, b])$ , то для всех внутренних узлов  $x_i, i = 1, \dots, n - 1$  справедливы следующие равенства

$$\begin{cases} g_i(x_i) = g_{i+1}(x_i) & (33a) \\ g'_i(x_i) = g'_{i+1}(x_i) & (33b) \\ g''_i(x_i) = g''_{i+1}(x_i) & (33c) \end{cases}$$

Поскольку сплайн является интерполяционным, то в узловых точках  $g(x)$  удовлетворяет следующим условиям

$$g_1(x_0) = y_0 \text{ и } g_i(x_i) = y_i, i = 1, \dots, n \quad (34)$$

Условия (33) и (34) представляют собой систему из  $3(n - 1) + n + 1 = 4n - 2$  уравнений. Учитывая то, что количество неизвестных коэффициентов составляет  $4n$ , потребуются два дополнительных условия, о которых будет сказано позже.

Введём следующее обозначение для второй производной сплайна в узловых точках  $M_i := g''(x_i), i = 0, \dots, n$ . Поскольку  $g_i(x) \in \mathbb{P}_3$ , то  $g''_i(x) \in \mathbb{P}_1$ , т.е. линейная функция. Учитывая, что  $g''_i(x_{i-1}) = M_{i-1}$  и  $g''_i(x_i) = M_i \Rightarrow$ , можно записать уравнения функции  $g''_i(x)$

$$g''_i(x) = M_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + M_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, x \in [x_{i-1}, x_i], \quad (35)$$

где  $h_i = x_i - x_{i-1}$ . Проинтегрируем (35) дважды:

$$g_i(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + C_i(x - x_{i-1}) + \tilde{C}_i \quad (36)$$

Условия (33a) и (34) позволяют найти константы интегрирования  $\tilde{C}_i$  и  $C_i$

$$1. \ g_i(x_{i-1}) = y_{i-1} = M_{i-1} \frac{h_i^2}{6} + \tilde{C}_i \Rightarrow$$

$$\tilde{C}_i = y_{i-1} - M_{i-1} \frac{h_i^2}{6} \quad (37)$$

$$2. \ g_i(x_i) = y_i = M_i \frac{h_i^2}{6} + C_i h_i + \tilde{C}_i \Rightarrow$$

$$C_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6} (M_i - M_{i-1}) \quad (38)$$

Непрерывность первой производной сплайна во внутренних узловых точках (условие (33b)) даёт следующее равенство

$$\underbrace{M_i \frac{h_i}{2} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1})}_{g'_i(x_i)} = \underbrace{-M_i \frac{h_{i+1}}{2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6}(M_{i+1} - M_i)}_{g'_{i+1}(x_i)} \quad (39)$$

Перегруппировав слагаемые в (39), приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $M_0, M_1, \dots, M_n$

$$\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} M_{i-1} + 2M_i + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} M_{i+1} = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right), \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (40)$$

Количество неизвестных составляет  $n+1$ , в то время как число уравнений равно  $n-1$ . Данный факт требует задание двух дополнительных условий. Приведём наиболее популярные варианты недостающих условий:

- естественный сплайн (natural spline)

$$g''(a) = g''(b) = 0 \Leftrightarrow M_0 = M_n = 0 \quad (41)$$

- фундаментальный сплайн (clamped spline): фиксируются значения первой производной на концах отрезка  $[a, b]$

$$\begin{cases} g'(a) = f'(a) \\ g'(b) = f'(b) \end{cases} \quad (42)$$

- сплайн с пропадающими узлами (not-a-knot spline): повышаются требования к гладкости (непрерывность  $g'''(x)$ ) в узлах  $x_1$  и  $x_{n-1}$

$$\begin{cases} g_1'''(x_1) = g_2'''(x_1) \\ g_{n-1}'''(x_{n-1}) = g_n'''(x_{n-1}) \end{cases} \quad (43)$$

Данные условия приводят к тождественному равенству полиномов  $g_1(x)$  и  $g_2(x)$ ,  $g_{n-1}(x)$  и  $g_n(x)$ .

- фиксируются значения второй производной на концах отрезка  $[a, b]$

$$g''(a) = M_0 = f''(a), g''(b) = M_n = f''(b). \quad (44)$$



- периодические граничные условия (для периодической функции)

$$g'(a) = g'(b), g''(a) = g''(b).$$

- Лагранжевы граничные условия. Задаётся первая производная в граничных точках равная производной интерполяционного полинома Лагранжа третьей степени, построенного по первым четырем точкам соответствующего конца отрезка  $[a, b]$ .

Дополнив (40) одним из вариантов дополнительных условий, получим систему линейных алгебраических уравнений с трёхдиагональной матрицей. Для решения такой системы разумно применить метод прогонки, который работает за линейное время.

Резюмируя всё выше сказанное, алгоритм построения кубического интерполяционного сплайна  $S_3^1(x)$  можно записать следующим образом:

1. решить систему линейных алгебраических уравнений, состоящих из уравнений (40) и двух дополнительных условий ((41), (42), (43) или (44)), определив значения  $\{M_i\}_{i=0}^n$ .
2. найти  $\{\tilde{C}_i\}_{i=0}^{n-1}$  и  $\{C_i\}_{i=0}^{n-1}$ , используя формулы (37) и (38) соответственно.

О том, как ведёт себя ошибка интерполяции при увеличении количества узлов в случае интерполяции кубическим сплайном  $S_3^1(x)$ , говорит следующая теорема.

*Теорема.* Пусть  $f(x) \in C^4([a, b])$  и  $S_3^1(x)$  интерполирует  $f(x)$ . Если в качестве дополнительных условий, используемых при построении сплайна, были использованы (42), (43) или (44), то  $\forall x \in [a, b]$

$$|f(x) - S_3^1(x)| \leq Ch^4, \quad (45)$$

где  $h = \max_i h_i$  и  $C = \frac{5}{384} \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|$ . Иными словами, интерполяционный процесс равномерно сходится при стремлении  $h$  к 0.

*Замечание.* Вместо четвёртого порядка точности естественный сплайн обладает лишь вторым порядком точности в общем случае (в неравенстве (45) вместо  $h^4$  будет  $h^2$ ).

*Упражнение.* Выполните интерполяцию функций  $\sin(x)$  и  $\cos(x)$  кубическим естественным сплайном на отрезке  $[0, \pi]$ , используя равномерную сетку с шагом  $h$ . Постройте график зависимости максимальной ошибки от шага сетки  $h$ . По какому закону убывает ошибка при уменьшении  $h$  для каждой из функций? Почему характер зависимостей получился разным?

### 3.3.1 Минимизирующее свойство кубического интерполяционного естественного сплайна

Кубический интерполяционный естественный сплайн обладает интересным свойством, которое позволяет провести связь между теорией аппроксимации и механикой. Если гибкую упругую рейку зафиксировать в заданных точках плоскости (рисунок 15), то очевидно, что под влиянием упругих сил она примет форму, соответствующую минимуму потенциальной энергии. Оказывается, что эта форма в точности повторяет форму кубического интерполяционного естественного сплайна. В частности, в граничных точках закрепления отсутствуют крутящие моменты, что и соответствует равенству нулю вторых производных. Сформулируем данное свойство в виде теоремы и проведём доказательство.

The concept of spline is using a thin, flexible strip (called a spline) to draw smooth curves through a set of points.

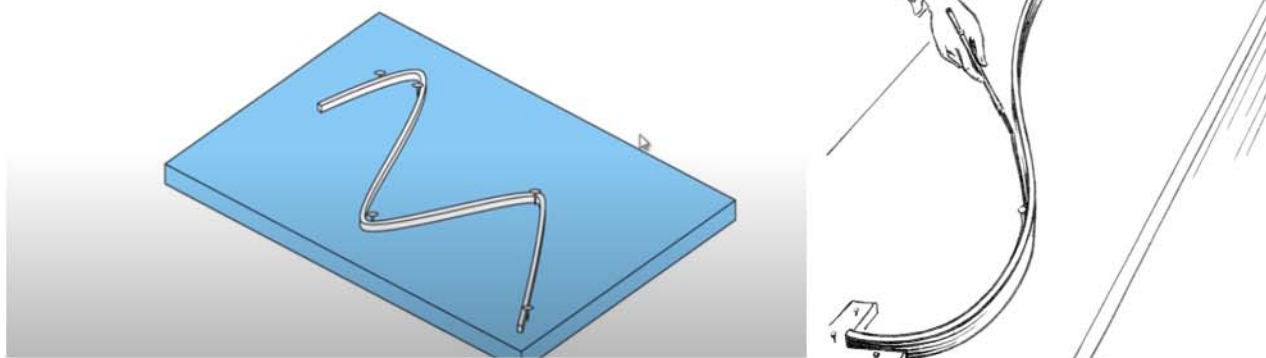


Рис. 15: Гибкая упругая рейка при фиксировании в заданных точках под влиянием упругих сил принимает форму кубического интерполяционного естественного сплайна

*Теорема (принцип минимума потенциальной энергии).* Среди всех функций  $u \in C^2([a, b])$ , проходящих через заданные точки ( $u(x_i) = y_i$ ), естественный кубический интерполяционный сплайн  $g$  является единственной функцией, сообщающей минимум функционалу  $\pi(u) = \int_a^b (u''(x))^2 dx$ , т.е.

$$\int_a^b (g''(x))^2 dx \leq \int_a^b (u''(x))^2 dx. \quad (46)$$

*Доказательство.* Выполним цепочку несложных преобразований

$$\pi(u - g) = \int_a^b (u'' - g'')^2 dx = \int_a^b (u'')^2 dx + \int_a^b (g'')^2 dx - 2 \int_a^b u'' g'' dx \pm \int_a^b (g'')^2 dx =$$

$$\pi(u) - \pi(g) + 2 \int_a^b g''(g'' - u'') dx$$

Рассмотрим отдельно последнее слагаемое и применим формулу интегрирования по частям

$$\int_a^b g''(g'' - u'') dx = g''(g' - u')|_a^b - \int_a^b g^{(3)}(g' - u') dx. \quad (47)$$

Первое слагаемое в правой части (47) равно 0 в силу условий интерполяции и, разбивая интеграл на сумму интегралов, получаем

$$\int_a^b g''(g'' - u'') dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i^{(3)}(u' - g'_i) dx = \sum_{i=1}^n 6a_i(u - g_i)|_{x_{i-1}}^{x_i} = 0. \quad (48)$$

Выражение (48) равно 0 опять же в силу выполнения условий интерполяции. В итоге имеем

$$\pi(u - g) = \pi(u) - \pi(g) \Rightarrow \pi(g) = \pi(u) - \pi(u - g) \leq \pi(u).$$

Теперь покажем единственность (от противного). Пусть существует функция  $u$ , на которой достигается минимум функционала  $\pi$ . Тогда

$$\pi(u) = \pi(g) \Rightarrow \pi(u - g) = 0$$

$$\pi(u - g) = \int_a^b (u'' - g'')^2 dx \Rightarrow u'' - g'' = 0$$

Проинтегрировав дважды левую и правую части последнего равенства, получим

$$u(x) = g(x) + c_1 x + c_2.$$

Поскольку для обеих функций  $u$  и  $g$  выполняются условия интерполяции в узлах сетки

$$u(x_i) = g(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n, \text{ и } n \geq 1$$

то получаем, что  $c_1 = c_2 = 0$ . Единственность доказана.

В данном разделе были рассмотрены наиболее популярные сплайны, которые используются при интерполяции табличных функций. Важно не только владеть техникой построения различных сплайнов, но и пониманием в каком случае целесообразней использовать тот или иной тип сплайна. Следующий пример является небольшой иллюстрацией того, в каком случае будет уместней использование Эрмитова сплайна, сохраняющего форму, а когда лучше

воспользоваться кубическим сплайном дефекта 1. На рисунке 16 представлено два набора данных, для каждого из которых выполнена интерполяция сплайнами средствами MATLAB (функции *pchip* и *spline*). Исходя из результатов, представленных на левом графике, стоит отдать предпочтение Эрмитовой интерполяции. Кубический сплайн демонстрирует осцилляции на концах промежутка, которые явно не характерны для функции, породившей данные. Результаты, представленные на рисунке справа, наоборот дают основание полагать, что для такого набора данных уместней воспользоваться интерполяцией с использованием кубического сплайна дефекта 1. В заключении можно сказать, что выбор того или иного типа сплайна зависит от гладкости функции. Если есть информация о гладкости функции, породившей данные, то и сплайн должен обладать такой же степенью гладкости.

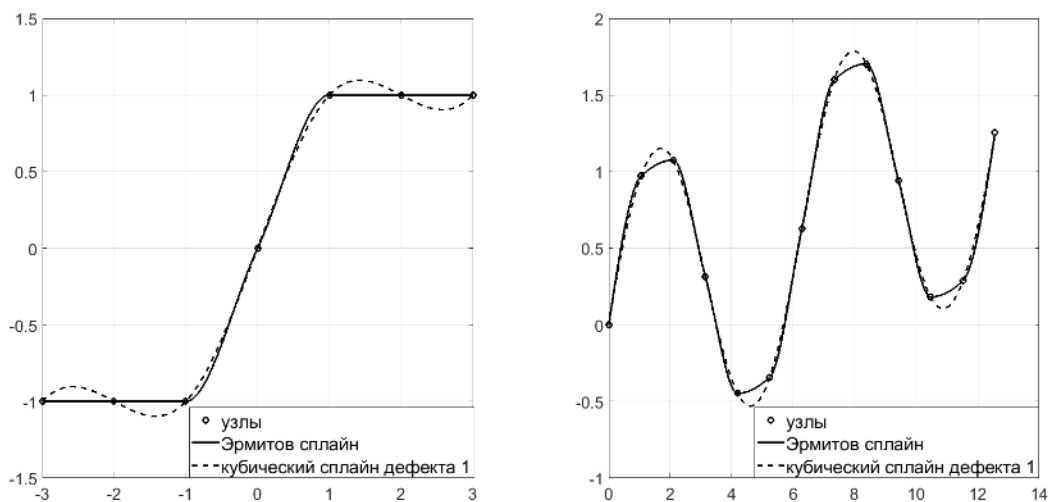


Рис. 16: Интерполяция с помощью кубического сплайна дефекта 1 и Эрмита сплайна, сохраняющего форму.

*Упражнение "Нарисуй свою руку".* Напишите следующий фрагмент кода в MATLAB

```
figure('position',get(0,'screensize'))
axes('position',[0 0 1 1])
[x,y] = ginput;
```

Приложите свою руку к экрану монитора. Используя мышку, выберите несколько точек для задания контура Вашей руки. Представим получившиеся координаты  $x$  и  $y$ , как значения функций независимой переменной  $t$ . Эти

функции в точках  $s$  совпадают по значению с  $x$  и  $y$  соответственно

```
n = length(x);
```

```
s = (1:n)';
```

```
t = (1:.05:n)';
```

Выполните интерполяцию с использованием функций *spline* и *pchip*, после чего визуализируйте полученные результаты. Какой из результатов является на Ваш взгляд более удачным?

## 3.4 Лабораторная работа

### 3.4.1 Задание

Дана функция. Выбрать для этой функции отрезок непрерывности и построить на нем равномерную упорядоченную сетку и сеточную функцию. Полученный набор точек интерполировать с помощью:

- (a) квадратичного сплайна
- (b) Эрмитова сплайна
- (c) Эрмитова сплайна, сохраняющего форму
- (d) кубического сплайна (дефекта 1).

В качестве дополнительных условий на границах отрезка для любого из вариантов, где это необходимо, можно использовать:

1. значения первой производной
2. значения второй производной
3. условие отсутствия узла (пропадающие узлы)
4. нулевые значения второй производной

### 3.4.2 Возможные варианты исследований

Базовые исследования.

1. Для небольшого числа узлов (2..10) построить график сплайна и функцию. На графике отметить узлы.

2. Для небольшого числа узлов (2..10) построить график фактической ошибки: разности между функцией и сплайном. На графике отметить узлы.
3. Построить зависимость максимальной ошибки от числа узлов. Максимальную ошибку вычислять в серединах между узлами.

Дополнительные исследования.

4. Построить зависимость координаты максимальной ошибки от числа узлов.
5. На основе заданной функции построить функцию с разрывом первой производной. Сравнить интерполяцию двух функций.
6. Модифицировать сетку таким образом, чтобы ошибка уменьшилась для некоторого числа узлов. Сравнить интерполяцию на двух сетках.
7. Построить зависимость максимальной ошибки от значения заданной производной на одной из границ отрезка. В интервал изменения производной включить точное значение и точку 0.
8. Выполнить базовые исследования с помощью MATLAB-функции, которая соответствует заданному сплайну. Сравнить полученные результаты.

### 3.4.3 Варианты функций

Варианты функций даны в п. 2.6.3.

### 3.4.4 Пример выполнения работы

В качестве примера рассмотрим приближение функции  $f(x) = x + \ln(x + 2.1)$  на отрезке  $[-2, 2]$  кубическим сплайном с заданными вторыми производными на концах отрезка по четырем узлам неравномерной сетки. Сетку и сеточную функцию возьмем из п. 2.6.4 и добавим к ним граничные условия:

$$f''(x) = -\frac{1}{(x + 2.1)^2} \Rightarrow f''(-2) = -100, f''(2) = -0.0595$$

Применяя формулу (40) и учитывая граничные условия, составим СЛАУ относительно значений вторых производных  $M_i$  искомого сплайна

$$\left\{ \begin{array}{l} M_0 = f''(-2) \\ \frac{h_1}{h_1+h_2}M_0 + 2M_1 + \frac{h_2}{h_1+h_2}M_2 = \frac{6}{h_1+h_2} \left( \frac{y_2-y_1}{h_2} - \frac{y_1-y_0}{h_1} \right) \\ \frac{h_2}{h_2+h_3}M_1 + 2M_2 + \frac{h_3}{h_2+h_3}M_3 = \frac{6}{h_2+h_3} \left( \frac{y_3-y_2}{h_3} - \frac{y_2-y_1}{h_2} \right) \\ M_3 = f''(2) \end{array} \right.$$

Подставим значения

$$\left\{ \begin{array}{l} M_0 = -100 \\ \frac{1}{2}M_0 + 2M_1 + \frac{1}{2}M_2 = \frac{6}{2} \left( \frac{0.7419 - (-0.9047)}{1} - \frac{-0.9047 - (-43026)}{1} \right) \\ \frac{1}{3}M_0 + 2M_1 + \frac{2}{3}M_2 = \frac{6}{3} \left( \frac{2.1314 - 0.7419}{2} - \frac{0.7419 - (-0.9047)}{1} \right) \\ M_3 = -0.0595 \end{array} \right.$$

и выполним ряд несложных преобразований

$$\left\{ \begin{array}{l} M_0 = -100 \\ M_0 + 4M_1 + M_2 = -10.5078 \\ M_1 + 6M_2 + 2M_3 = 5.1453 \\ M_3 = -0.0595 \end{array} \right.$$

Решая полученную систему, получаем вектор вторых производных сплайна

$$M = (-100, 23.1169, -2.9754, -0.0595)^T.$$

С помощью формул (37), (38) вычисляем наборы констант  $\tilde{C}$  и  $C$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} y_0 - M_0 \frac{h_1^2}{6} \\ y_1 - M_1 \frac{h_2^2}{6} \\ y_2 - M_2 \frac{h_3^2}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.3026 - (-100) \frac{1}{6} \\ -0.9047 - 23.1169 \frac{1}{6} \\ 0.7419 - (-2.9754) \frac{2^2}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.3641 \\ -4.7575 \\ 2.7255 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} \frac{y_1-y_0}{h_1} - \frac{h_1}{6} (M_1 - M_0) \\ \frac{y_2-y_1}{h_2} - \frac{h_2}{6} (M_2 - M_1) \\ \frac{y_3-y_2}{h_3} - \frac{h_3}{6} (M_3 - M_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(-0.9047) - (-4.3026)}{1} - \frac{1}{6} (23.1169 - (-100)) \\ \frac{0.7419 - (-0.9047)}{1} - \frac{1}{6} ((-2.9754) - 23.1169) \\ \frac{3.4110 - 0.7419}{2} - \frac{2}{6} ((-0.0595) - (-2.9754)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -17.1216 \\ 5.9953 \\ 0.3626 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Согласно формуле (36) получаем три кубические параболы, образующие сплайн

$$g(x) = \begin{cases} 20.5195x^3 + 73.1169x^2 + 79.1122x + 25.6101, & x \in [-2, -1] \\ -4.3487x^3 - 1.4877x^2 + 4.5076x + 0.7419, & x \in [-1, 0] \\ 0.2430x^3 - 1.4877x^2 + 3.3380x + 0.7419, & x \in [0, 2] \end{cases}$$

На рисунке 17 приведены графики функции, построенного сплайна и ошибки на отрезке. Также, для сравнения построен полином Ньютона, полученный в п. 2.6.4.

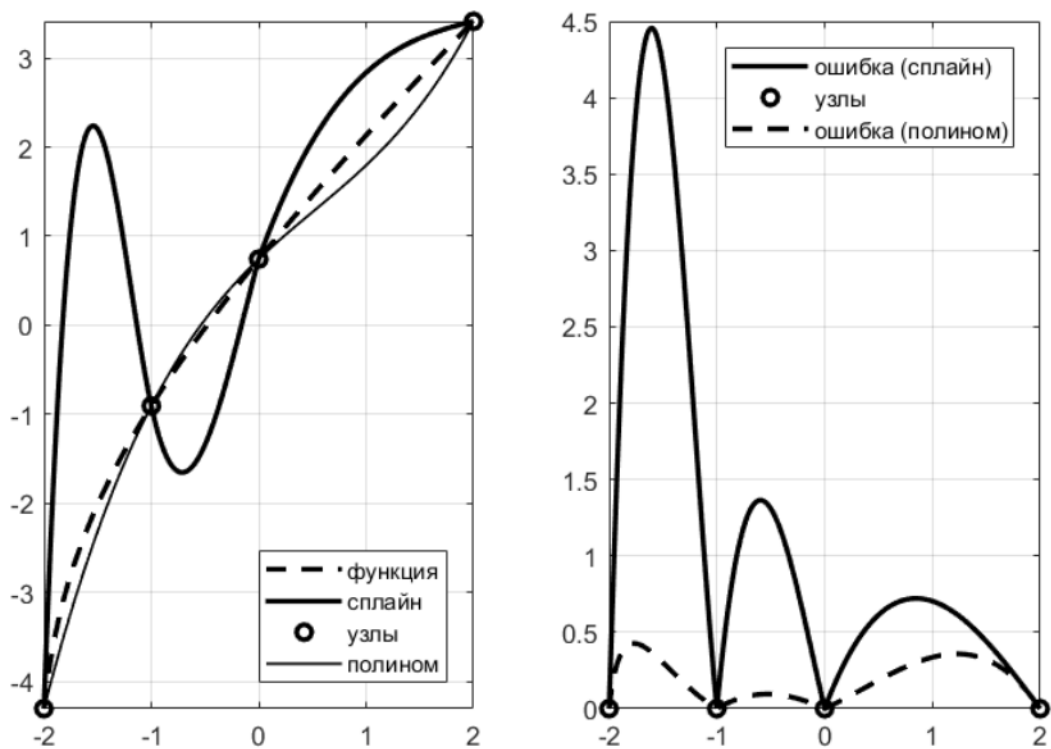


Рис. 17: Графики функции, сплайна и полинома Ньютона (слева). Графики ошибок интерполяции (справа)



## 4 Метод наименьших квадратов

В некоторых задачах исходные данные (табличная функция), которые используются для аппроксимации, содержат ошибки. Например, такая ситуация характерна, если табличная функция получена в результате натурального эксперимента. Очевидно, методы, использующие идею интерполяции (интерполяционные полиномы и интерполяционные сплайны) в таком случае являются не самым удачным инструментом аппроксимации. Причиной является то, что построенный интерполянт "вберёт в себя" все те ошибки, которые присутствовали в исходных данных. В качестве иллюстрации на рисунке 18 представлены результаты интерполяции с помощью полинома и кубического сплайна. График функции  $f(x)$ , которая порождает данные, представлен толстой линией. Значения табличной функции содержат погрешности, поскольку точки не лежат на графике  $f(x)$ . Интерполяционный полином демонстрирует значительные отклонения от функции  $f(x)$  на концах отрезка. Интерполяционный сплайн даёт меньшую ошибку аппроксимации, однако его качественное поведение (излишние перегибы в центральной области отрезка) отличается от поведения исходной функции  $f(x)$ .

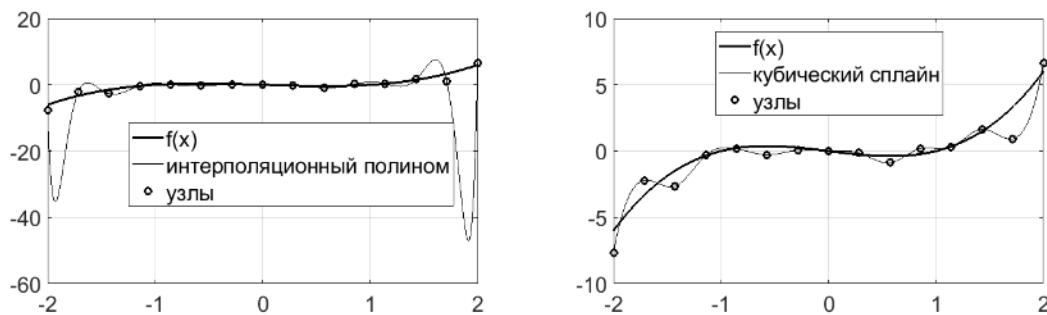


Рис. 18: Интерполяция с помощью полинома (слева) и кубического сплайна (справа). График функции, которая порождает табличную функцию, изображён толстой линией. Табличная функция (маркеры) содержит ошибки.

Резюмируя, можно сказать следующее: в случае присутствия неточностей в исходных данных от критерия интерполирования стоит отказаться. Альтернативой критерию интерполирования является критерий сглаживания, который лежит в основе метода наименьших квадратов (МНК).

## 4.1 Постановка задачи

Пусть задача табличная функция:  $(x_i, y_i), i = 0, \dots, n$ . Требуется построить функцию  $\phi(x)$  следующего вида

$$\phi(x) = \sum_{j=0}^m a_j \phi_j(x), \quad (49)$$

минимизируя сумму квадратов отклонений между значениями табличной функции  $y_i$  и значениями искомой функции  $\phi(x_i)$

$$S(\phi) = \sum_{i=0}^n \rho_i (\phi(x_i) - y_i)^2 \xrightarrow{\{a_j\}} \min. \quad (50)$$

Функции  $\phi_j(x)$  называются базисными полиномами и являются известными. Функция  $S(\phi)$  носит название целевой функции, или функционала ошибки. Минимизация функции  $S$  выполняется по неизвестным коэффициентам  $a_j$ , образующими линейную комбинацию в (49). Весовые коэффициенты  $\{\rho_i\}_{i=1}^m$  являются известными неотрицательными числами и выражают влияние каждого из значений  $\{y_i\}_{i=1}^m$  на значение функции  $S$ .

Возвращаясь к примеру, с которого начался данный раздел (рисунок 18), приведём результат аппроксимации той же самой табличной функции с помощью метода наименьших квадратов (рисунок 19, справа). Функция  $\phi(x)$  в данном случае ищется как полином третьей степени. Сравнивая графики функций  $f(x)$  и  $\phi(x)$ , а также графики интерполяционного полинома и кубического сплайна, можно сделать, что метод наименьших квадратов в данном случае даёт наилучший результат с точки зрения качества аппроксимации.

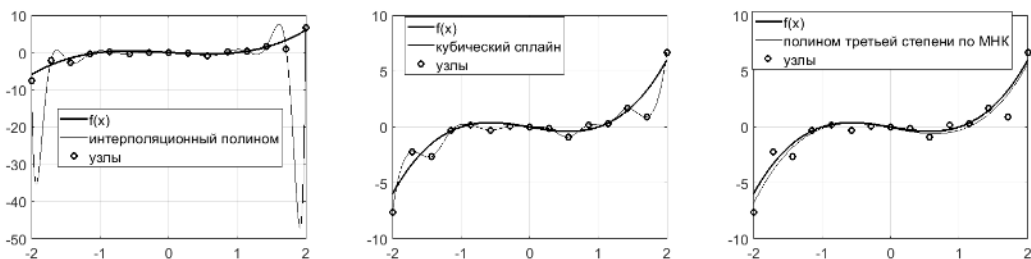


Рис. 19: Интерполяция с помощью полинома (слева) и кубического сплайна (по центру), аппроксимация по методу наименьших квадратов (справа). В качестве модели МНК используется полином третьей степени.

## 4.2 Построение МНК-модели

Обсудим процедуру отыскания функции  $\phi(x)$  (49) по методу наименьших квадратов. Условия минимума целевой функции  $S(\phi) = S(a_0, \dots, a_m)$  следующие

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a_k} = 0, k = 0, \dots, m & (51) \\ H(S) = \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial a_k \partial a_l} \right\}_{k,l} > 0, k, l = 0, \dots, m & (52) \end{cases}$$

Условие (52) означает, что матрица  $H(S)$ , составленная из вторых частных производных, должна быть положительно определена ( $H$  носит название матрицы Гессе). Запишем выражение для частной производной  $\frac{\partial S}{\partial a_k}$  с учётом (49) и (50)

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 2 \sum_{i=0}^n \rho_i (\phi(x_i) - y_i) \frac{\partial \phi(x_i)}{\partial a_k} = 2 \sum_{i=0}^n \rho_i \phi(x_i) \phi_k(x_i) - 2 \sum_{i=0}^n \rho_i y_i \phi_k(x_i).$$

Учитывая, что  $\phi(x_i) = \sum_{j=0}^m a_j \phi_j(x_i)$ , получим

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 2 \sum_{j=0}^m a_j \sum_{i=0}^n \rho_i \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) - 2 \sum_{i=0}^n \rho_i y_i \phi_k(x_i) \quad (53)$$

Для удобства проведения дальнейших выкладок обозначим  $\{\phi_j(x_i)\}_{i=0}^n$  как  $\phi_j^h$  и определим скалярное произведение векторов с весами

$$(y^h, z^h) = \sum_{i=0}^n \rho_i y_i z_i. \quad (54)$$

Тогда формула (53) примет вид

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 2 \sum_{j=0}^m a_j (\phi_j^h, \phi_k^h) - 2(y^h, \phi_k^h). \quad (55)$$

Записывая первое условие минимума (51) с учётом (55), приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $a_0, \dots, a_m$

$$\sum_{j=0}^m (\phi_j^h, \phi_k^h) a_j = (y^h, \phi_k^h), k = 0, \dots, m \quad (56)$$

Матрица данной системы имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} (\phi_0^h, \phi_0^h) & (\phi_1^h, \phi_0^h) & \dots & (\phi_m^h, \phi_0^h) \\ (\phi_0^h, \phi_1^h) & (\phi_1^h, \phi_1^h) & \dots & (\phi_m^h, \phi_1^h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\phi_0^h, \phi_m^h) & (\phi_1^h, \phi_m^h) & \dots & (\phi_m^h, \phi_m^h) \end{pmatrix}$$

и носит название матрицы Грама. Известно, что если система векторов  $\phi_0^h, \phi_1^h, \dots, \phi_m^h$ , порождающая матрицу Грама, является линейно независимой, то определитель данной матрицы отличен от 0. Более того, данная матрица является положительно определённой. Таким образом, линейная независимость векторов  $\phi_0^h, \phi_1^h, \dots, \phi_m^h$  будет обеспечивать существование и единственность набора коэффициентов  $a_0, \dots, a_m$ .

Очевидно, что вторая частная производная  $\frac{\partial^2 S}{\partial a_k \partial a_l}$  равна  $2(\phi_l^h, \phi_k^h)$ . Поэтому матрица Гессе совпадает с матрицей Грама с точностью до коэффициента 2. И условие (52) будет выполнено опять же в случае линейной независимости векторов  $\phi_0^h, \phi_1^h, \dots, \phi_m^h$ .

Какие же базисные полиномы  $\phi_0(x), \dots, \phi_m(x)$  нужно выбрать, чтобы обеспечить линейную независимость системы векторов  $\phi_0^h, \dots, \phi_m^h$ ? Данная система векторов будет линейно независимой, если из равенства  $\sum_{j=0}^m c_j \phi_j^h = 0$  следует, что  $c_0 = \dots = c_m = 0$ . Запишем подробнее

$$\sum_{j=0}^m c_j \phi_j^h = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^m c_j \phi_j(x_i) = 0, \forall i = 0, \dots, n \Leftrightarrow Q_m(x_i) = 0, \forall i = 0, \dots, n,$$

где  $Q_m(x) = \sum_{j=0}^m c_j \phi_j(x)$ . Таким образом, множество функций  $\phi_j(x)$  будет линейно независимым на сетке  $x^h$ , если не существует обобщённого полинома  $Q_m(x)$  отличного от 0, такого, что все узлы сетки  $x^h$  являются его корнями. Рассмотрим наиболее очевидный способ выбора базисных полиномов

$$\phi_j(x) = x^j, j = 0, \dots, m. \quad (57)$$

В этом случае  $Q_m(x)$  - это алгебраический полином степени  $m$  и условие

$$Q_m(x_i) = 0, i = 0, \dots, n \Rightarrow c_0 = \dots = c_m = 0$$

будет выполняться, если  $m < n + 1$ . Это неравенство и будет обеспечивать линейную независимость сеточных функций  $\phi_0^h, \dots, \phi_m^h$ .

Если базисные полиномы выбраны согласно (57), то элементы матрицы и вектора правой части системы (56) имеют вид

$$(\phi_j^h, \phi_k^h) = \sum_{i=0}^n \rho_i x_i^j x_i^k = \sum_{i=0}^n \rho_i x_i^{j+k}$$

$$(y^h, \phi_k^h) = \sum_{i=0}^n \rho_i y_i x_i^k$$

Такая матрица становится плохо обусловленной (приближается к матрице Гильберта) при  $n \rightarrow \infty$ . Улучшить свойства матрицы можно, если в качестве базисных полиномов  $\phi_j(x)$  использовать многочлены Чебышева.

### 4.3 Полиномиальные МНК-модели

Модели МНК можно разделить на линейные и нелинейные. В первом случае искомая функция  $\phi(x)$  является линейной относительно коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_m$ . Тогда задача построения функции  $\phi(x)$ , т.е. отыскания значений  $a_0, a_1, \dots, a_m$  сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Если же речь идёт о нелинейных моделях МНК, то тогда функция  $\phi(x)$  зависит от искоемых коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_m$  нелинейно. В этом случае для построения модели необходимо решать систему нелинейных уравнений, что является более трудоёмкой задачей по сравнению с первым случаем.

Рассмотрим подробно один из типов линейных моделей. Линейную модель МНК называют полиномиальной, если аппроксимирующая функция  $\phi(x)$  является алгебраическим полиномом. Рассмотрим процедуру построения такой модели на примере полинома второй степени. Пусть  $\phi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$  и все весовые коэффициенты  $\rho_i$  равны 1. Тогда система линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $a_0, a_1, a_2$  выглядит следующим образом

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + \left(\sum_{i=0}^n x_i\right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^2\right) a_2 = \left(\sum_{i=0}^n y_i\right) \\ \left(\sum_{i=0}^n x_i\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^2\right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^3\right) a_2 = \left(\sum_{i=0}^n x_i y_i\right) \\ \left(\sum_{i=0}^n x_i^2\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^3\right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^4\right) a_2 = \left(\sum_{i=0}^n x_i^2 y_i\right) \end{cases} \quad (58)$$

Матрица системы является симметричной и положительно определённой, поэтому для решения целесообразно воспользоваться методом Холецкого. Несложно понять, как будет выглядеть СЛАУ в случае, когда функция  $\phi(x)$  - это полином степени  $m$ .

#### 4.4 Взвешенный метод наименьших квадратов

Весовые коэффициенты  $\rho_i$  в выражении целевой функции (50) позволяют выразить степень доверия вычислителя к каждой точке из набора данных. Большее/меньшее значение коэффициента  $\rho_i$  соответствует большей/меньшей достоверности "измерения"  $(x_i, y_i)$ . Пусть  $\tilde{y}_i = y_i + \epsilon_i$  - известное значение с погрешностью. Если (примерно) известна величина погрешности  $\epsilon_i$ , то весовой коэффициент можно рассчитать по формуле

$$\rho_i = \frac{1}{\epsilon_i^2 + \epsilon}, \quad (59)$$

где  $\epsilon > 0$  - малое число, которое гарантирует отсутствие 0 в знаменателе.

Рассмотрим простой пример, в котором показано, как выбор весовых коэффициентов влияет на результат аппроксимации. Пусть данные порождаются функцией  $y(x) = \sin(\pi x)$  и содержат 3 точки:  $x^h = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ ,  $y^h = \{0, 1, 0\}$ . Весовые коэффициенты заданы следующим образом:  $\rho_0 = \alpha, \rho_1 = \rho_2 = 1$ . Посмотрим, как значение первого коэффициента повлияет на конечный результат.

Аппроксимируем табличную функцию по методу наименьших квадратов полиномом первой степени

$$P_1(x) = a_0 + a_1x = a_0(\alpha) + a_1(\alpha)x = \frac{2}{1 + 5\alpha} + \frac{2}{1 + 5\alpha}(\alpha - 1)x. \quad (60)$$

Значения коэффициентов МНК-модели  $a_0$  и  $a_1$  можно получить, составив и решив систему, подобную (58). Рассмотрим 3 возможных случая:

1. все точки равноправны  $\Rightarrow \alpha = 1$
2. первая точка не учитывается  $\Rightarrow \alpha = 0$
3. учитывается только первая точка  $\Rightarrow \alpha = \infty$

Если для каждого случая подставить соответствующее значение  $\alpha$  в формулу (60), то графики получившихся прямых будут иметь вид, представленный на рисунке 20.

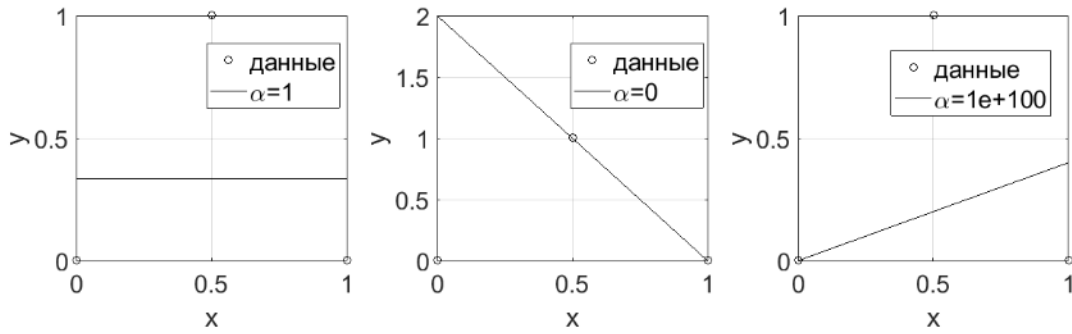


Рис. 20: Аппроксимация по методу наименьших квадратов линейной функцией. Различные значения первого весового коэффициента:  $\alpha = 1$  (слева),  $\alpha = 0$  (по центру) и  $\alpha = \infty$  (справа)

Метод наименьших квадратов (не взвешенный) является неустойчивым к данным, содержащим выбросы. Проиллюстрируем это следующим примером. Пусть данные порождены полиномом третьей степени и содержат три точки-выброса (левый график на рисунке 21). Аппроксимируем данные по МНК, используя весовые коэффициенты равные 1 (центральный график на рисунке 21). Результирующая функция (пунктирная линия) значительно отличается от исходной функции (сплошная линия), что очевидно является следствием присутствия выбросов в данных. Решить данную проблему путем подбора весовых коэффициентов. Определить значения коэффициентов можно, используя следующий итеративный алгоритм: на первой итерации положить все коэффициенты равными 1. На каждом шаге строится МНК-модель и происходит пересчет коэффициентов по формуле (59), где  $\epsilon_i$  вычисляется как разность между  $y_i$  и значением построенной модели в узле  $x_i$ . Обновленные коэффициенты используются на следующей итерации для построения новой МНК-модели и т.д. Процесс останавливается, когда "нащупана" точка равновесия, т.е. значения весовых коэффициентов практически перестают меняться от итерации к итерации. Результат применения такого итерационного алгоритма представлен на рисунке 21 справа.

## 4.5 Лабораторная работа

### 4.5.1 Задание

1. Дана функция. Выбрать для этой функции отрезок непрерывности и построить на нем равномерную сетку и сеточную функцию с числом уз-

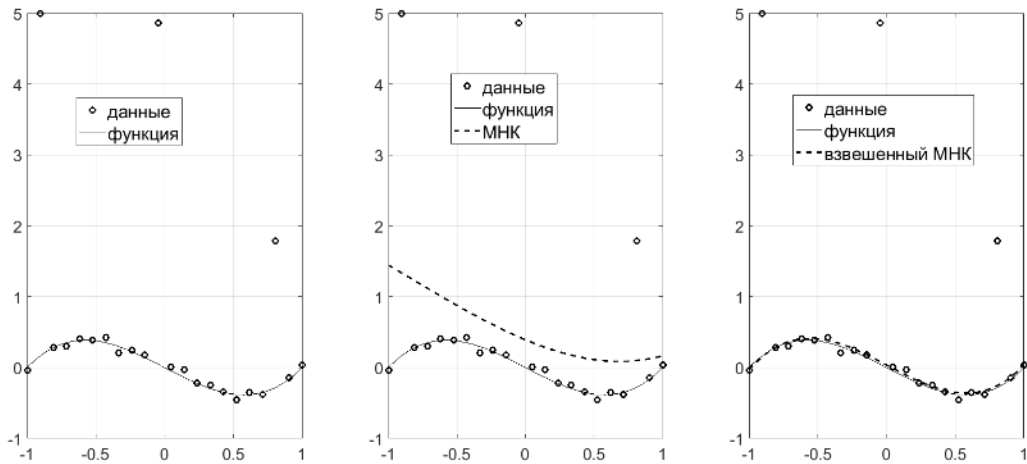


Рис. 21: Данные, содержащие выбросы (слева). Аппроксимация по методу наименьших квадратов, все весовые коэффициенты равны 1 (по центру). Аппроксимация по взвешенному методу наименьших квадратов с использованием итерационного алгоритма (справа)

лов не менее 100. По полученным данным построить полиномы первого, второго и третьего порядков с помощью метода наименьших квадратов.

2. На основе данной функции построить полином третьего порядка, используя разложение в ряд Тейлора. На выбранном отрезке построить равномерную сетку с небольшим числом узлов (20...50). Внося возмущения в значения полинома (не более 5%), создать сеточную функцию. С помощью метода наименьших квадратов найти коэффициенты заданного полинома.
3. На основе данной функции построить полином третьего порядка, используя разложение в ряд Тейлора. На выбранном отрезке построить равномерную сетку и сеточную функцию с небольшим числом узлов (20...50). Создать 3 выброса, амплитудой в 2..5 раз больше амплитуды функции. С помощью метода наименьших квадратов с итерационной обработкой найти коэффициенты заданного полинома.

В качестве базисных функций для любого из вариантов можно взять:

- систему полиномов  $\{x^j\}_{j=0}^m$
- систему тригонометрических функций  $\{1, \cos(jx), \sin(jx), j = 1, \dots, m\}$
- систему полиномов Чебышева.



## 4.5.2 Возможные варианты исследований

Базовые исследования.

1. Построить график заданной функции и построенного полинома. На графике отметить узлы.
2. Построить график фактической ошибки: разности между функцией и полиномом. На графике отметить узлы.
3. Построить функцию ошибки (50) в зависимости от числа узлов. Число узлов должно быть больше степени полинома.

Дополнительные исследования.

4. Построить зависимость функции ошибки (50) от степени полинома для фиксированного числа узлов. Число узлов должно быть больше степени полинома.
5. На основе заданной функции построить функцию с разрывом первой производной. Сравнить интерполяцию двух функций.
6. Выбрать узел, вес которого будет меняться. Построить зависимость ошибки в выбранном узле от изменения его веса.
7. Выбрать узел, вес которого будет меняться. Построить зависимость функции ошибки (50) от изменения веса выбранного узла.
8. Аппроксимировать данные с помощью MATLAB-функций *polyfit* и *fit*. Сравнить с результатами, полученными в рамках базовых В качестве базисных функций для любого из вариантов можно исследований.

Для определенности сумма всех весов может быть нормирована на единицу:  $\sum_{i=0}^n \rho_i = 1$ .

## 4.5.3 Варианты функций

Варианты функций даны в п. 2.6.3.

#### 4.5.4 Пример выполнения работы

В качестве примера рассмотрим приближение функции  $f(x) = x + \ln(x + 2.1)$  на отрезке  $[-2, 2]$  полиномом третьей степени ( $m = 3$ ) по 21 узлу равномерной сетки ( $n = 20$ ). Все узлы будут с одинаковым весом, который можно принять равным 1 для упрощения дальнейших вычислений. Построим сетку и сеточную функцию:

$$a = -2.0, b = 2.0, n = 20, h = \frac{(b-a)}{n} = \frac{(2+2)}{20} = 0.2$$

$$x_i = -2 + 0.2i, y_i = f(x_i), i = 0, \dots, n.$$

Построение матрицы Грама  $G$  начнем с вычисления матрицы  $\Phi = \{\phi_j^h\}_{j=0}^m$ , состоящей из значений векторов базисных функций  $\{x^j\}_{j=0}^m$  на заданной сетке  $\{x_i\}_{i=0}^n$

$$\Phi = \begin{pmatrix} x_i^0 \\ x_i^1 \\ x_i^2 \\ x_i^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0000 & 1.0000 & \dots & 1.0000 & 1.0000 \\ -2.0000 & -1.8000 & \dots & 1.8000 & 2.0000 \\ 4.0000 & 3.2400 & \dots & 3.2400 & 4.0000 \\ -8.0000 & -5.8320 & \dots & 5.8320 & 8.0000 \end{pmatrix}$$

Теперь матрица Грама получается матричным умножением полученной матрицы  $\Phi$  саму на себя

$$G = \Phi\Phi^T = \begin{pmatrix} 21.0000 & 0.0000 & 30.8000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 30.8000 & 0.0000 & 81.0656 \\ 30.8000 & 0.0000 & 81.0656 & 0.0000 \\ 0.0000 & 81.0656 & 0.0000 & 253.2358 \end{pmatrix}$$

Заметим, что половина элементов матрицы  $G$  обнулилась за счет симметрии заданного промежутка. Также матричным умножением матрицы  $\Phi$  и вектора сеточной функции  $Y = \{y_i\}_{i=0}^n$  получается правая часть системы для нахождения коэффициентов полинома

$$B = \Phi Y = \begin{pmatrix} 9.4814 \\ 52.0819 \\ 4.7111 \\ 142.1925 \end{pmatrix}$$

Решая систему  $Ga = B$ , например, методом Холецкого, который учитывает симметрию и положительную определенность ее матрицы, получим

значения коэффициентов полинома

$$a = \begin{pmatrix} 0.8272 \\ 1.3534 \\ -0.2562 \\ 0.1282 \end{pmatrix}$$

На рисунке 22 слева построены графики полученного по методу наименьших квадратов полинома третьей степени и интерполяционного полинома Ньютона такой же степени, построенного в п. 2.6.4. Также, представлены ошибки аппроксимации в случае обоих подходов (рисунок 22, справа).

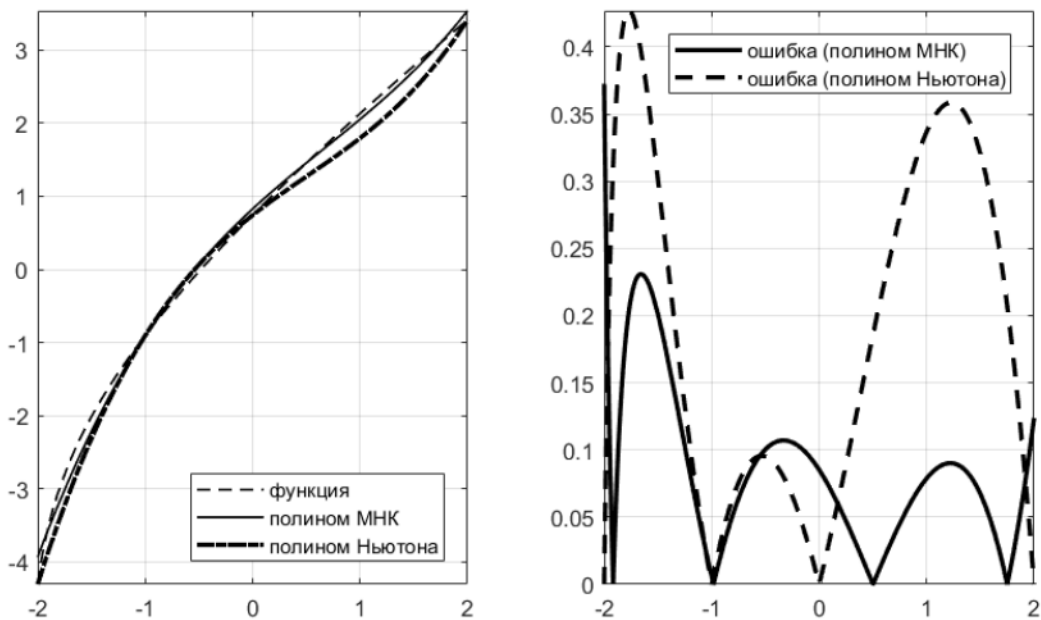


Рис. 22: График функции, полинома третьей степени, построенного по МНК, и интерполяционного полинома Ньютона третьей степени (слева). График ошибки аппроксимации по МНК и с помощью полинома Ньютона (справа)

## 5 Сглаживающие сплайны

Сглаживание зашумлённых данных можно осуществить с использованием сплайнов. В таком случае сплайн-функция уже не обязана проходить через заданные точки и будет определяться, как функция минимизирующая значение следующего функционала

$$J(u) = (1-p) \underbrace{\int_a^b (u''(x))^2 dx}_{\text{сглаживание}} + p \underbrace{\sum_{i=0}^n \rho_i (u(x_i) - y_i)^2}_{\text{приближение к данным}}, \quad (61)$$

где  $u \in C^2([a, b])$ ,  $\rho_i \geq 0$ ,  $p \in [0, 1]$ .

В процессе минимизации функционала  $J(u)$  ищется компромисс между двумя требованиями: приближение к заданным значениям и получение гладкой функции. Выбор значения  $p$  определяет, какая из этих целей наиболее важна для решаемой задачи. Покажем, что решение данной задачи минимизации - это естественный кубический сплайн.

*Утверждение.* Пусть  $u_*(x)$  сообщает минимум (61). Тогда  $u_*(x)$  - естественный кубический сплайн, но не обязательно интерполяционный.

*Доказательство.* Пусть  $p = \frac{1}{2}$ . Тогда с точностью до постоянного множителя

$$J(u) = \pi(u) + S(u), \quad (62)$$

где  $\pi(u) = \int_a^b (u''(x))^2 dx$  и  $S(u) = \sum_{i=0}^n \rho_i (u(x_i) - y_i)^2$ .

С помощью функции  $u_*(x)$  на равномерной сетке  $x^h$ , состоящей из  $n+1$  узла, определим табличную функцию  $\mu^h$

$$u_*^h = \mu^h = \{\mu_i\}_{i=0}^n.$$

По  $x^h, \mu^h$  построим интерполяционный естественный кубический сплайн  $g(x)$ . Поскольку  $g(x_i) = \mu_i = u_*(x_i)$ , то согласно ранее доказанному утверждению справедливо неравенство

$$\pi(g) \leq \pi(u_*). \quad (63)$$

С другой стороны,  $J(u_*) \leq J(g)$  и  $S(u_*) = S(g)$ , а значит

$$\pi(u_*) \leq \pi(g). \quad (64)$$

С учётом неравенств (63) и (64) получаем, что  $g(x) \equiv u_*(x)$ .

## 5.1 Построение сглаживающего сплайна

Получим формулы, необходимые для построения сглаживающего сплайна. Для кубического естественного сплайна согласно (40) выполняется набор условий

$$\frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}M_i + \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} = \frac{1}{h_i}y_{i-1} - \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right)y_i + \frac{1}{h_{i+1}}y_{i+1},$$

$$i = 1, \dots, n-1 \quad (65)$$

Введём обозначения:  $m = [M_1, \dots, M_{n-1}]^\top$ ,  $\mu^h = [y_0, \dots, y_n]^\top$ . Тогда (65) можно записать в матричной форме

$$Am = H\mu^h, \quad (66)$$

где  $A = \begin{pmatrix} \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & & & \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2+h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_{n-1}+h_n}{3} & \end{pmatrix}$ ,

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} & -\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) & \frac{1}{h_2} & & \\ & \frac{1}{h_2} & -\left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) & \frac{1}{h_3} & \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & \frac{1}{h_{n-1}} & -\left(\frac{1}{h_{n-1}} + \frac{1}{h_n}\right) & \frac{1}{h_n} \end{pmatrix}.$$

На каждом элементарном отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  сплайн  $g(x)$  - это полином третьей степени  $g_i(x)$ , поэтому

$$g''(x) = g_i''(x) = M_{i-1} + \frac{M_i - M_{i-1}}{h_i}(x - x_{i-1}).$$

Преобразуем первое слагаемое, входящее в выражение (62), положив  $u$  равным  $g$

$$\int_a^b (g''(x))^2 dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (g_i''(x))^2 dx$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( M_{i-1} + \frac{M_i - M_{i-1}}{h_i}(x - x_{i-1}) \right)^2 dx$$

Проинтегрируем и выполним ряд тривиальных преобразований

$$\begin{aligned}
\int_a^b (g''(x))^2 dx &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} \left( M_{i-1} + \frac{M_i - M_{i-1}}{h_i} (x - x_{i-1}) \right)^3 \frac{h_i}{M_i - M_{i-1}} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{3} \frac{1}{M_i - M_{i-1}} (M_i^3 - M_{i-1}^3) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{3} (M_{i-1}^2 + M_{i-1}M_i + M_i^2) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{3} \left( M_{i-1}^2 + \frac{1}{2}M_{i-1}M_i \right) + \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{3} \left( \frac{1}{2}M_{i-1}M_i + M_i^2 \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_{i+1}}{3} M_i \left( M_i + \frac{1}{2}M_{i+1} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{3} M_i \left( \frac{1}{2}M_{i-1} + M_i \right) \\
&= 0 + \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \frac{h_{i+1}}{3} M_i \left( M_i + \frac{1}{2}M_{i+1} \right) + \frac{h_i}{3} M_i \left( \frac{1}{2}M_{i-1} + M_i \right) \right] + 0 \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} M_i \left[ \frac{h_i}{6} M_{i-1} + \left( \frac{h_i}{3} + \frac{h_{i+1}}{3} \right) M_i + \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} \right] \\
&= (Am, m)
\end{aligned}$$

Тогда  $J(u)$  примет следующий вид

$$J(u) = (Am, m) + \sum_{i=0}^n \rho_i (\mu_i - y_i)^2$$

Функционал  $J(u)$ , минимизацию которого необходимо выполнить, является функцией  $n + 1$  переменной  $\mu_0, \dots, \mu_n$ , где  $\mu_i$  - это значение кубического естественного сплайна  $g(x)$  в узле  $i$ . Достаточные условия минимума имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J}{\partial \mu_k} = 0, k = 0, \dots, n \end{array} \right. \quad (67)$$

$$\left\{ H(J) = \left\{ \frac{\partial^2 J}{\partial \mu_k \partial \mu_l} \right\}_{k,l} > 0, k, l = 0, \dots, n \right. \quad (68)$$

Выпишем выражение для частной производной

$$\frac{\partial J(u)}{\partial \mu_k} = \frac{\partial}{\partial \mu_k} (Am, m) + 2\rho_k (\mu_k - y_k)$$

и преобразуем первое слагаемое

$$\frac{\partial}{\partial \mu_k}(Am, m) = \left( \frac{\partial(Am)}{\partial \mu_k}, m \right) + \left( Am, \frac{\partial m}{\partial \mu_k} \right) = 2 \left( \frac{\partial(Am)}{\partial \mu_k}, m \right).$$

С учетом равенства (66) получим

$$\frac{\partial}{\partial \mu_k}(Am, m) = 2 \left( \frac{\partial(H\mu_h)}{\partial \mu_k}, m \right) = 2 \left( \frac{\partial \mu_h}{\partial \mu_k}, H^\top m \right) = 2(H^\top m)_k,$$

где  $2(H^\top m)_k$  - это  $k$ -я компонента вектора  $2(H^\top m)$ . Тогда условие (67) можно переписать в следующем виде

$$(H^\top m)_k + \rho_k(\mu_k - y_k) = 0, k = 0, \dots, n \quad (69)$$

Пусть  $P = \text{diag}\{\rho_i\}$ . Поскольку все весовые коэффициенты положительны, то  $\exists P^{-1} = \text{diag}\{\rho_i^{-1}\}$ . Тогда (69) можно записать в матричной форме

$$H^\top m + P\mu^h = Py^h \Leftrightarrow P^{-1}H^\top m + \mu^h = y^h \Leftrightarrow HP^{-1}H^\top m + \underbrace{H\mu^h}_{Am} = Hy^h$$

В итоге имеем СЛАУ

$$(HP^{-1}H^\top + A)m = Hy^h, \quad (70)$$

матрица которой является симметричной и положительно определенной (а также пятидиагональной). Следовательно система (70) имеет единственное решение. Решив данную СЛАУ, находим вектор вторых производных сплайна  $m$ , после чего вычисляется вектор узловых значений сплайна  $\mu^h$  по формуле

$$\mu^h = y^h - P^{-1}H^\top m.$$

С помощью значений  $\mu^h$  выполняется построение искомого сплайна, который является интерполяционным по отношению к найденным узловым значениям.

*Упражнение.* Проверить выполнение условия (68).

На рисунке 23 представлены результаты аппроксимации табличной функции с использованием сглаживающих сплайнов (функция `csaps` в MATLAB) при различных значениях параметра  $p$ :

1.  $0 < p < 1$ , сглаживающий сплайн;
2.  $p = 0$ : сглаживающий сплайн вырождается в линейную функцию, аппроксимирующую данные по МНК;
3.  $p = 1$ : интерполяционный кубический естественный сплайн.

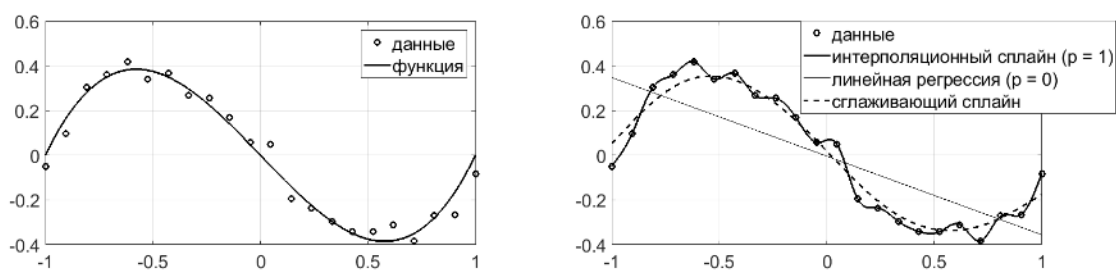


Рис. 23: Данные и функция, порождающая данные (слева). Аппроксимация сглаживающим сплайном при различных значениях параметра  $p$  (справа)

## 5.2 Лабораторная работа

### 5.2.1 Задание

Дана функция. Выбрать для этой функции отрезок непрерывности и построить на нем сетку. Создать набор данных, внося возмущения в значения функции (не более 5%). По полученным данным построить сглаживающий сплайн.

### 5.2.2 Возможные варианты исследований

Базовые исследования.

1. Для небольшого числа узлов (10..20) построить графики функции, данных и сплайна.
2. Для небольшого числа узлов (10..20) построить графики фактической ошибки: разности между функцией и сплайном.
3. Для небольшого числа узлов (10..20) построить графики фактической ошибки: разности между данными и сплайном.
4. Построить график зависимости функционала (61) от числа узлов.

Дополнительные исследования.

5. Построить зависимость функционала (61) от параметра  $p$  для фиксированного числа узлов.
6. Выбрать узел, вес которого будет меняться. Построить зависимость ошибки в выбранном узле от изменения его веса.
7. Выбрать узел, вес которого будет меняться. Построить зависимость функционала (61) от изменения веса выбранного узла.



8. Аппроксимировать данные с помощью MATLAB-функций *csaps*. Сравнить с результатами, полученными в рамках базовых исследований. Исследовать влияние входных параметров функции *csaps* - сглаживающего параметра  $p$  и весовых коэффициентов  $\rho_i$  - на полученный результат.

### 5.2.3 Варианты функций

Варианты функций даны в п. 2.6.3.

### 5.2.4 Пример выполнения работы

В качестве примера рассмотрим приближение функции  $f(x) = \sin(\frac{x}{4})$  на отрезке  $[-10, 10]$  с помощью сглаживающего сплайна по 21 узлу равномерной сетки ( $n = 20$ )

$$a = -10.0, b = 10.0, n = 20, h = \frac{(b - a)}{n} = 1.$$

Для внесения ошибки добавим к значениям функции в узлах быстро осциллирующее слагаемое

$$x_i = -10 + i, y_i = f(x_i) + 0.1 \sin(73x - 0.42), i = 0, \dots, n.$$

Веса  $\rho_i$  всех точек будут одинаковые и нормированы на 1

$$\rho_i = \frac{1}{n + 1}, i = 0, \dots, n.$$

Тогда матрицы  $P$  и  $P^{-1}$  станут единичными матрицами с точностью до множителя

$$P = \frac{1}{n + 1}E, P^{-1} = (n + 1)E.$$

Значение веса  $p$  выберем равным 0.6.

Чтобы составить систему (70) нужно построить квадратную матрицу  $A$  размерностью  $(n - 1) \times (n - 1)$  и прямоугольную матрицу  $H$  размерностью  $(n - 1) \times (n + 1)$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & & & \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$



На рисунке 24 приведены графики функции, данных, построенного сплайна и ошибок на отрезке.

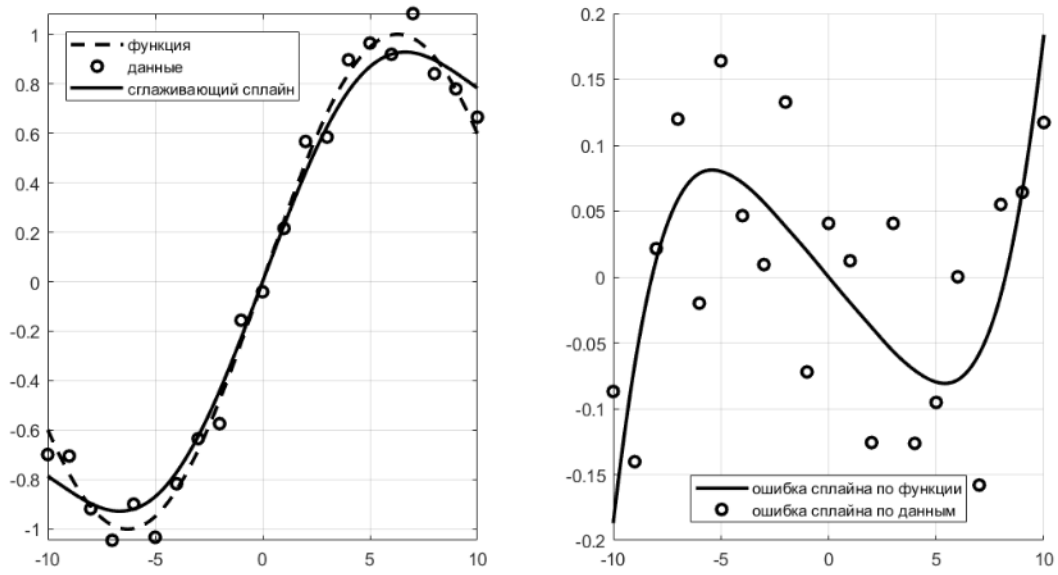


Рис. 24: Графики функции, данных и сглаживающего сплайна (слева). Графики ошибок приближения (справа)

## 6 Упражнения

1. Постройте интерполяционный полином Лагранжа.  $x^h = \{0, 2, 3, 5\}$ ,  $y^h = \{1, 3, 2, 5\}$ .
2. С какой точностью можно вычислить  $\sin(\frac{\pi}{12})$  по формуле Лагранжа, если известны значения  $\sin(0)$ ,  $\sin(\frac{\pi}{6})$ ,  $\sin(\frac{\pi}{4})$  и  $\sin(\frac{\pi}{3})$ ?
3. Пусть  $f(x) = x \log(x)$ ,  $x^h = \{8.1, 8.3, 8.6, 8.7\}$ . Оцените ошибку интерполяции, используя формулу (17), и сравните с фактической погрешностью в случае  $n = 1$  и  $n = 2$ .
4. Пусть  $P_3(x)$  - интерполяционный полином, построенный по данным  $x^h = \{0, 0.5, 1, 2\}$ ,  $y^h = \{0, y, 3, 2\}$ . Определите  $y$ , если коэффициент при  $x^3$  полинома  $P_3(x)$  равен 6.
5.  $x^h = \{1, 1.1, 1.4\}$ ,  $y^h = \{1.3, 1.0, 0.1\}$ . Постройте интерполяционный полином Ньютона и вычислите его значение в точке  $x = 1.3$ .
6. Пусть  $f(x) = 3x \exp(x) - \exp(2x)$ . Аппроксимируйте  $f(1.03)$  с помощью полинома Эрмита степени не выше 3 на сетке  $x^h = \{1, 1.05\}$ . Оцените ошибку, используя формулу (31), и сравните с её фактическим значением. Прделайте аналогичные выкладки, если  $x^h = \{1, 1.05, 1.07\}$  и степень полинома Эрмита не выше 5.
7. Для автомобиля, движущегося по прямолинейному участку дороги, в некоторые моменты времени известны скорость и пройденный путь. Оцените скорость и пройденный путь при  $t = 10$  с, используя Эрмитову интерполяцию. Оцените максимальную скорость автомобиля.

Время, с	0	3	5	8	13
Пройденный путь, м	0	69	117	190	303
Скорость, м/с	22	23	24	23	22

8. Естественный кубический интерполяционный сплайн на отрезке  $[0, 2]$  задаётся следующим образом

$$g(x) = \begin{cases} 1 + 2x - x^3, & x \in [0, 1], \\ 2 + b(x - 1) + c(x - 1)^2 + d(x - 1)^3, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Определите  $b$ ,  $c$  и  $d$ .

9. Фундаментальный кубический интерполяционный сплайн для функции  $f$  на отрезке  $[1, 3]$  задаётся следующим образом

$$g(x) = \begin{cases} 3(x-1) + 2(x-1)^2 - (x-1)^3, & x \in [1, 2], \\ a + b(x-2) + c(x-2)^2 + d(x-2)^3, & x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Определите  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ , если  $f'(1) = f'(3)$ .

10. Получите два недостающих уравнения для фундаментального сплайна из условий (42).
11. Докажите, что (54) удовлетворяет всем свойствам скалярного произведения, если все  $\rho_i > 0$ .
12. Постройте полиномиальную МНК-модель первой и второй степени, а также МНК-модель вида  $\phi(x) = a \exp(x) + b \exp(-x)$  для заданной табличной функции. Вычислите ошибку в каждом из трёх случаев.

$x_i$	-1	-0.5	0	0.5	1
$y_i$	1.194	0.43	0.103	0.322	1.034

## 7 Список литературы для самостоятельного изучения

- [1] Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копчёнова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. - М.: Высшая школа, 1994.
- [2] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Высшая школа, 1987.
- [3] Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Том 1. - М.: Физматгиз, 1962.
- [4] Бор К. Практическое руководство по сплайнам. - М.: Радио и связь, 1985.
- [5] Вержбицкий В.М. Основы численных методов. - М.: Высшая школа, 2002.
- [6] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980.
- [7] Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. - М.: Мир, 1998.
- [8] Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.Н. Вычислительные методы. Том 1. - М.: Наука, 1976.
- [9] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М.: Наука, 1989.
- [10] Милн В.Э. Численный анализ. - М.: Издательство иностранной литературы, 1951.
- [11] Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1972.
- [12] Burden R.L., Faires J.D. Numerical Analysis. - Brooks/Cole, Cengage Learning, 2010.
- [13] Moler C. Numerical Computing with MATLAB. - SIAM, 2004.
- [14] Quarteroni A., Sacco R., Saleri F. Numerical mathematics. - Springer, 2000.

*Куриц Валентина Валерьевна  
Добрецова Светлана Борисовна*

# **ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ**

Учебное пособие

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции  
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

---

Подписано в печать 30.01.2023. Формат 60×84/16. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 4,5. Тираж 100. Заказ 0393.

---

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного авторами,  
в Издательско-полиграфическом центре Политехнического университета.

195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.

Тел.: (812) 552-77-17; 550-40-14.