

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математико-механический факультет

Пакулина Антонида Николаевна

Практикум по методам вычислений

Часть 1

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург

2018

Рецензенты:

докт. физ.-мат. наук, проф. Ю.К. Демьянович (С.-Петербургский гос. ун-т),

докт. физ.-мат. наук, проф. В.Б. Хазанов (С.-Петербургский гос. морской техн. ун-т).

Рекомендовано к печати

Учебно-методической комиссией математико-механического факультета

Санкт-Петербургского государственного университета

Пакулина А.Н.

Практикум по методам вычислений. СПб., СПбГУ, 2018. – 127 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для проведения вычислительного практикума по курсу “Методы вычислений”, читаемому на математико-механическом факультете СПбГУ на 2, 3 курсах. В необходимом объеме рассмотрены теоретические вопросы. В пособии размещены варианты заданий с удобной навигацией по всем темам учебного курса. Для решения задач приведены указания. Учебное пособие может быть использовано для дистанционного обучения. Оно может быть рекомендовано обучающимся других вузов, в учебные планы которых включено изучение соответствующих разделов вычислительной математики.

©А.Н. Пакулина

Содержание

Предисловие	7
1. Приближённое решение нелинейных уравнений и нелинейных систем	8
1.1. Приближённое решение нелинейных уравнений	8
1.1.1. Отделение корней	8
1.1.2. Уточнение корней	8
1.1.3. Метод Ньютона (метод касательных)	9
1.1.4. Метод секущих	10
1.1.5. Метод хорд	10
1.1.6. Метод простой итерации (метод последовательных приближений)	11
1.1.7. Задание 1	12
1.1.8. Варианты задания 1	13
1.1.9. Задание 2	21
1.2. Метод Ньютона для решения нелинейной системы второго порядка	22
1.2.1. Задание	23
1.2.2. Варианты систем	24
2. Интерполирование по значениям функции.	
Интерполяционный многочлен в форме Ньютона.	
Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа	27
2.1. Постановка задачи интерполирования	27
2.2. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона.	
Разделенные разности	28
2.3. Задание	28
2.4. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа	30
2.5. Задание	30
2.6. Варианты заданий на прямое и обратное интерполирование	31
3. Интерполирование в случае равностоящих узлов. Конечные разности.	
Интерполяционный многочлен в форме Ньютона	32
3.1. Постановка задачи интерполирования	32
3.2. Конечные разности	32
3.3. Построение интерполяционного многочлена в зависимости от расположения точки интерполирования	33
3.3.1. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона для начала таблицы	33
3.3.2. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона для конца таблицы	35
3.3.3. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона-Гаусса для середины таблицы (интерполирование вперед)	35
3.4. Задание	36
3.5. Варианты заданий	37
4. Интерполирование Эрмита с использованием разделенных разностей	38
4.1. Постановка задачи	38
4.2. Задание. Образец выполнения задания	38
4.3. Варианты заданий	39

5. Численное дифференцирование	41
5.1. Основные формулы численного дифференцирования для функции, заданной аналитически	41
5.2. Формулы численного дифференцирования для функции, заданной таблично в равноотстоящих узлах	41
5.3. Задание	42
5.4. Варианты заданий	43
6. Приближенное вычисление интегралов по простейшим формулам	49
6.1. Общие сведения	49
6.2. Квадратурные формулы прямоугольников	49
6.2.1. Квадратурная формула левых прямоугольников	49
6.2.2. Квадратурная формула правых прямоугольников	49
6.2.3. Квадратурная формула средних прямоугольников	49
6.2.4. Составные квадратурные формулы прямоугольников	50
6.3. Квадратурная формула трапеций	50
6.4. Квадратурная формула Симпсона	50
6.5. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса	51
6.6. Оценка погрешности квадратурных формул	51
6.7. Правило Рунге практической оценки погрешности (экстраполяция по Ричардсону)	51
6.8. Задание	52
7. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности (формулы типа Гаусса)	53
7.1. Общие сведения	53
7.2. Построение квадратурной формулы типа Гаусса	54
7.3. Частные случаи формулы типа Гаусса	55
7.3.1. Формула Гаусса	55
7.3.2. Формула Мелера	57
7.4. Варианты заданий	57
8. Численное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка	63
8.1. Постановка задачи	63
8.2. Метод Эйлера и улучшенный метод Эйлера	63
8.2.1. Метод Эйлера	63
8.2.2. Улучшенный метод Эйлера	64
8.3. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка	64
8.4. Правило Рунге (двойного пересчета) практической оценки погрешности. Экстраполяция по Ричардсону	65
8.5. Методы Адамса	65
8.5.1. Экстраполяционный метод Адамса	65
8.5.2. Интерполяционный метод Адамса	67
8.6. Варианты заданий	69

9. Вопросы устойчивости задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений и систем. Жесткие задачи	78
9.1. Жесткие уравнения	78
9.1.1. Постановка задачи. Устойчивые уравнения	78
9.1.2. Метод Эйлера	78
9.1.3. Обратный метод Эйлера	79
9.1.4. Метод средней точки	79
9.1.5. Методы Адамса	80
9.2. Жесткие системы	81
9.2.1. Постановка задачи	81
9.2.2. Метод Эйлера	82
9.2.3. Обратный метод Эйлера	82
9.2.4. Методы Адамса	82
9.3. Задание	83
9.4. Варианты заданий	84
10. Векторные и матричные нормы. Обусловленность задачи решения линейной алгебраической системы	88
10.1. Векторные нормы	88
10.2. Матричные нормы	88
10.3. Обусловленность задачи решения линейной алгебраической системы	89
10.4. Задание	90
10.5. Варианты матриц	90
11. Прямые методы решения линейных систем	91
11.1. Схема Гаусса единственного деления	91
11.2. Схема Жордана единственного деления	92
11.3. Схемы с выбором главного элемента	92
11.4. LU -разложение	93
11.5. Задание	94
11.6. Варианты расширенных матриц	94
12. Итерационные методы решения линейных систем	97
12.1. Метод простой итерации	97
12.1.1. Расчетная формула. Условие сходимости	97
12.1.2. Получение решения с заданной точностью	97
12.2. Метод Зейделя	98
12.3. Приведение системы вида $Ax = b$ к виду $x = Nx + g$	98
12.4. Метод верхней релаксации	99
12.5. Итерационный метод с чебышевским набором параметров	100
12.6. Метод Люстерника ускорения сходимости метода последовательных приближений	101
12.7. Варианты заданий	101
13. Проблема собственных значений	111
13.1. Метод вращений (Якоби) решения полной проблемы собственных значений и векторов матрицы	111
13.2. Апостериорная оценка погрешности собственного числа симметричных матриц	113

13.3. Степенной метод и метод скалярных произведений нахождения максимального по модулю собственного числа симметричной матрицы	114
13.3.1. Степенной метод	114
13.3.2. Метод скалярных произведений	114
13.4. Нахождение противоположной границы спектра	115
13.5. Метод Виландта уточнения изолированного собственного числа (метод обратных итераций)	116
13.6. Метод Эйткена уточнения собственного числа эрмитовой матрицы	116
13.7. Представление результатов	117
13.8. Варианты заданий	118
13.9. Варианты матриц	126

Список литературы	127
--------------------------	------------

Предисловие

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для проведения вычислительного практикума по курсу “Методы вычислений”, читаемому на математико-механическом факультете СПбГУ на 2, 3 курсах и соответствует образовательным программам по соответствующим направлениям подготовки. В необходимом объеме рассмотрены теоретические вопросы по следующим разделам численных методов:

- 1) Приближённое решение нелинейных уравнений и систем.
- 2) Приближение функций и численное дифференцирование.
- 3) Численное интегрирование.
- 4) Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.
- 5) Исследование на устойчивость и решение жестких систем.
- 6) Прямые и итерационные методы решения систем линейных уравнений.
- 7) Решение полной и частичной проблемы собственных значений.

В пособии размещены варианты заданий с удобной навигацией по всем темам учебного курса. Для решения задач приведены указания. Студенты должны освоить различные численные методы, программируя алгоритм решения задач на персональном компьютере.

Учебное пособие может быть использовано для дистанционного обучения.

Оно может быть рекомендовано обучающимся других вузов, в учебные планы которых включено изучение соответствующих разделов вычислительной математики.

1. Приближённое решение нелинейных уравнений и нелинейных систем

1.1. Приближённое решение нелинейных уравнений

Дано уравнение

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

где функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором конечном или бесконечном интервале $a < x < b$.

Всякое значение x^* такое, что $f(x^*) = 0$, называется корнем уравнения (1) или нулем функции $f(x)$.

Приближенное нахождение изолированных действительных корней уравнения складывается из двух этапов:

- 1) Отделение корней, т. е. установление промежутков $[\alpha, \beta]$, в которых содержится один и только один корень уравнения (1). Использование этих промежутков для определения начальных приближений к корням.
- 2) Уточнение приближенных корней.

1.1.1. Отделение корней

Для отделения корней следует построить таблицу значений функции или график функции, найти промежутки, на концах которых функция $f(x)$ имеет разные знаки. Тогда внутри этих промежутков содержится по крайней мере один корень уравнения $f(x) = 0$. Нужно тем или иным образом убедиться, что данный корень является единственным.

Для уменьшения длин промежутков может быть использован метод половинного деления (бисекции).

Полагаем $[a_0, b_0] = [a, b]$. Пусть $c_0 = (a_0 + b_0)/2$.

Далее строим последовательность промежутков $\{[a_k, b_k]\}$, $k = 1, 2, \dots$

$$[a_k, b_k] = \begin{cases} [a_{k-1}, c_{k-1}], & \text{если } f(a_{k-1}) \cdot f(c_{k-1}) < 0, \\ [c_{k-1}, b_{k-1}], & \text{если } f(c_{k-1}) \cdot f(b_{k-1}) < 0. \end{cases}$$

Здесь на каждом шаге длина промежутка уменьшается вдвое, так что

$$b_k - a_k = (b - a)/2^k.$$

1.1.2. Уточнение корней

Для уточнения корней используются итерационные методы. При решении задачи итерационными методами следует обращать внимание на следующие моменты:

- расчетная формула;
- условие сходимости;
- порядок сходимости (скорость сходимости): число $\alpha \geq 1$ называют порядком сходимости последовательности $\{x_k\}$ к x^* , если $x_k \rightarrow x^*$ и существует постоянная C , такая что при всех k $|x_k - x^*| \leq C |x_{k-1} - x^*|^\alpha$;
- получение решения с заданной точностью ε . Здесь имеется в виду нахождение x_k такого, что выполняется условие $|x_k - x^*| < \varepsilon$.

Существуют априорные и апостериорные оценки для фактической погрешности $|x_k - x^*|$. Априорные оценки часто бывают сильно завышены. Легко показать, что для оценки точности приближения x_k любого итерационного метода в предположении, что $f'(x) \neq 0$, можно воспользоваться неравенством

$$|x_k - x^*| \leq \frac{|f(x_k)|}{m_1}, \quad (2)$$

где $m_1 = \min |f'(x)|$ при $a \leq x \leq b$.

1.1.3. Метод Ньютона (метод касательных)

Пусть дано уравнение (1).

Пусть функция $f(x)$ — вещественная и находим вещественный корень x^* .

Будем предполагать, что на отрезке $[a, b]$ таком, что $f(a)f(b) < 0$, $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и $f'(x), f''(x)$ — знакопостоянны.

Выбираем $x_0 \in [a, b]$. Заменим уравнение в окрестности x_0 приближённым уравнением

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0,$$

левая часть которого есть линейная часть разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 . Отсюда

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Действуя аналогично, получаем расчетную формулу метода Ньютона

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Метод Ньютона имеет простой геометрический смысл: x_k есть абсцисса точки пересечения касательной к графику функции $f(x)$, построенной в точке $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, с осью абсцисс.

Теорема 1 (о сходимости). *Если*

- 1) $f(a)f(b) < 0$,
- 2) $f'(x), f''(x)$ сохраняют определенные знаки при $x \in [a, b]$,
- 3) $f(x_0)f''(x_0) > 0, x_0 \in [a, b]$,

то $x_k \rightarrow x^*$, причем скорость сходимости определяется неравенством

$$|x_k - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_{k-1} - x^*)^2. \quad (4)$$

Здесь

$$m_1 = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|. \quad (5)$$

Если $f(x_0)f''(x_0) < 0$, то можно не прийти к $x = x^*$, если x_0 не очень хорошее.

Так как метод Ньютона имеет второй порядок сходимости, можно пользоваться следующим критерием: если $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, то $|x_k - x^*| < \varepsilon$.

Замечание 1. Если $f'(x^*) = 0$, то квадратичной сходимости может и не быть.

Например, пусть $f(x) = x^2$, корень $x^* = 0$ — корень второй кратности, расчетная формула имеет вид: $x_{k+1} = x_k/2$ и сходимость линейная (если $x_0 \neq 0$).

Второго порядка сходимости для корня кратности p можно достичь, применяя расчетную формулу вида

$$x_k = x_{k-1} - p \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Замечание 2. Иногда целесообразно применять модифицированный метод Ньютона с расчетной формулой

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_0)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Скорость сходимости модифицированного метода значительно меньше.

Замечание 3. Приведем расчетную формулу метода третьего порядка сходимости:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} - \frac{f^2(x_{k-1}) f''(x_{k-1})}{2 (f'(x_{k-1}))^3}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8)$$

1.1.4. Метод секущих

Заменяя производную в расчетной формуле метода Ньютона её приближенным значением по формулам численного дифференцирования, получаем расчетную формулу

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} (x_k - x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Порядок сходимости метода секущих определяется неравенством

$$|x_k - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1} (x_{k-1} - x^*)^\alpha, \quad (10)$$

где $\alpha = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1.618$, а m_1 и M_2 имеют определенный в (5) смысл.

В методе секущих можно пользоваться критерием: если $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, то $|x_k - x^*| < \varepsilon$.

1.1.5. Метод хорд

Пусть известен промежуток $[a, b]$, такой что $f(a) \cdot f(b) < 0$ и $f''(x) > 0$. Рассмотрим два возможных случая.

- 1) $f(a) < 0$, соответственно $f(b) > 0$. В этом случае конец b неподвижен и последовательные приближения при $x_0 = a$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(b) - f(x_k)} (b - x_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (11)$$

образуют монотонно возрастающую последовательность, причем

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x^* < b.$$

2) $f(a) > 0$, соответственно $f(b) < 0$. В этом случае конец a неподвижен и последовательные приближения при $x_0 = b$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(a)}(x_k - a), \quad k = 0, 1, \dots \quad (12)$$

образуют монотонно убывающую последовательность, причем

$$a < x^* < \dots < x_{k+1} < x_k < \dots < x_1 < x_0 = b.$$

Пределы этих последовательностей x^* существуют, так как они ограничены и монотонны.

Для оценки точности можно воспользоваться уже известным неравенством (2)

$$|x_k - x^*| \leq \frac{|f(x_k)|}{m_1},$$

и

$$|x_k - x^*| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_k - x_{k-1}|, \quad (13)$$

где $m_1 = \min |f'(x)|$, $M_1 = \max |f'(x)|$ при $a \leq x \leq b$.

Геометрически метод эквивалентен замене кривой $y = f(x)$ хордами, проходящими через точки $(x_k, f(x_k))$, $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$, $k=0, 1, \dots$

Порядок метода — первый и нельзя пользоваться в качестве критерия модулем разности двух соседних приближений.

1.1.6. Метод простой итерации (метод последовательных приближений)

Заменим уравнение (1) равносильным уравнением

$$x = \varphi(x), \quad (14)$$

где $\varphi(x)$ — непрерывна. Расчетная формула метода

$$x_k = \varphi(x_{k-1}), \quad k = 1, 2 \dots \quad (15)$$

Если эта последовательность сходящаяся, то $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$.

Кратко сформулируем условие сходимости. Пусть в некоторой окрестности (a, b) корня x^* уравнения (14) производная $\varphi'(x)$ сохраняет постоянный знак и выполнено неравенство

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1. \quad (16)$$

Тогда, если производная $\varphi'(x)$ положительна, то последовательные приближения (15) ($x_0 \in (a, b)$) сходятся к корню x^* монотонно, если производная $\varphi'(x)$ отрицательна, то последовательные приближения колеблются около корня x^* .

Априорная оценка погрешности

$$|x^* - x_k| \leq \frac{q^k}{1 - q} |x_1 - x_0|. \quad (17)$$

Апостериорная оценка погрешности

$$|x^* - x_k| \leq \frac{q}{1 - q} |x_k - x_{k-1}|. \quad (18)$$

Отметим, что как показывает оценка (18), ошибочно было бы пользоваться в качестве критерия получения решения с заданной точностью ε совпадения x_k и x_{k-1} с точностью ε .

Замечание 1. Напомним, что приводить уравнение вида (1) к виду (14) следует так чтобы $|\varphi'(x)| \leq q < 1$, причем, чем меньше число q , тем быстрее, вообще говоря, последовательные приближения сходятся к корню x^* . Укажем один достаточно общий прием приведения. Пусть искомый корень x^* уравнения лежит на отрезке $[a, b]$, причем

$$0 < m_1 \leq f'(x) \leq M_1$$

при $a \leq x \leq b$. Заменяем уравнение (1) эквивалентным ему уравнением

$$x = x - \lambda f(x) \quad (\lambda > 0).$$

Из условия сходимости получаем, что можно взять

$$\lambda = \frac{1}{M_1}$$

и тогда

$$q = 1 - \frac{m_1}{M_1} < 1$$

Замечание 2. Формулу (3) метода Ньютона можно рассматривать как формулу метода итераций для уравнения $x = \varphi(x)$, где $\varphi(x) = x - f(x)/f'(x)$.

Легко проверить, что $\varphi'(x^*) = 0$. Поэтому следует ожидать квадратичную сходимость метода.

1.1.7. Задание 1

Дано уравнение $f(x) = 0$.

Требуется

- 1) Отделить все корни или корни на указанном интервале.
- 2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
- 3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”, ранее и далее в таблице они обозначены x^* .
- 4) Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
- 5) Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.001$ методом хорд. В качестве критерия использовать оценку (13). Сравнить с фактической погрешностью.
- 6) Вычислить корни методом итераций с точностью $\varepsilon = 0.00001$, выбрав в качестве x_0 то же значение, что и в методе Ньютона.
- 7) Сравнить результаты, количество итераций.

Для численной реализации методов должны быть созданы подпрограммы с параметрами:

- x_0 — нулевое приближение к корню (в методе Ньютона и в методе итераций);
- ε — заданная точность;
- k_{\max} — максимальное количество итераций (для исключения заикливания).

Подпрограмма должна возвращать либо x_k , такое что $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, либо $x_{k_{\max}}$.

Результаты методов уточнения оформить в виде таблицы 1.

Таблица 1

k	x_k	$x_k - x_{k-1}$	$x_k - x^*$	$f(x_k)$
0		—		
1				
...

1.1.8. Варианты задания 1

Вариант 1

$$x^2 - 20 \sin(x) = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Вычислить корни методом итераций с точностью $\varepsilon = 0.00001$, выбрав в качестве x_0 то же значение, что и в методе Ньютона.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 2

$$63x^5 - 70x^3 + 15x^2 - 8x = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
- 3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.

- 4) Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
- 5) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 3

$$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 - \frac{9}{x+10} = 0. \text{ Найти корни на } [0, 2].$$

Требуется

- 1) Отделить корни на указанном интервале.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.001$ методом хорд. В качестве критерия использовать оценку $|x_k - x^*| \leq |f(x_k)|/m_1$. Сравнить с фактической погрешностью.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 4

$$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x + \sqrt{1 - 0.2x^2} = 0. \text{ Найти отрицательные корни.}$$

Требуется

- 1) Отделить корни на указанном интервале.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Вычислить корни методом итераций с точностью $\varepsilon = 0.00001$, выбрав в качестве x_0 то же значение, что и в методе Ньютона.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 5

$$\operatorname{ctg}(x) - 2x^2 = 0. \text{ Найти первые три положительные корни.}$$

Требуется

- 1) Отделить корни на указанном интервале.
- 2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
- 3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 4) Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
- 5) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 6

$$e^{-\frac{x}{4}} \sin(\pi x) + 0.1 = 0. \text{ Найти корни, принадлежащие промежутку } [0, 3].$$

Требуется

- 1) Отделить корни на указанном интервале.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.001$ методом хорд. В качестве критерия использовать оценку $|x_k - x^*| \leq |f(x_k)|/m_1$. Сравнить с фактической погрешностью.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 7

$$\lg(x) - \frac{1}{x^2} = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
- 3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.

- 4) Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
- 5) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 8

$$\ln(5 - x) + x = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Вычислить корни методом итераций с точностью $\varepsilon = 0.00001$, выбрав в качестве x_0 то же значение, что и в методе Ньютона.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 9

$$e^{-\sqrt{x}} \cos(2\pi x) = 0.6.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.001$ методом хорд. В качестве критерия использовать оценку $|x_k - x^*| \leq |f(x_k)|/m_1$. Сравнить с фактической погрешностью.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 10

$$x^4 + \frac{1}{5-x} + 1 = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
- 3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 4) Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
- 5) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 11

$$\operatorname{tg}(x) + e^x = 0. \text{ Найти отрицательные корни.}$$

Требуется

- 1) Отделить корни на указанном интервале.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Вычислить корни методом итераций с точностью $\varepsilon = 0.00001$, выбрав в качестве x_0 то же значение, что и в методе Ньютона.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 12

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right) - x - 3 = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.001$ методом хорд. В качестве критерия использовать оценку $|x_k - x^*| \leq |f(x_k)|/m_1$. Сравнить с фактической погрешностью.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 13

$$x^2 - 20 \sin(x) = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Вычислить корни методом итераций с точностью $\varepsilon = 0.00001$, выбрав в качестве x_0 то же значение, что и в методе Ньютона.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 14

$$63x^5 - 70x^3 + 15x^2 - 8x = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все вещественные корни.
- 2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
- 3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 4) Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
- 5) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 15

$$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 - \frac{9}{x+10} = 0. \text{ Найти корни, принадлежащие промежутку } [0, 2].$$

Требуется

- 1) Отделить корни на указанном интервале.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.

- 3) Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.001$ методом хорд. В качестве критерия использовать оценку $|x_k - x^*| \leq |f(x_k)|/m_1$. Сравнить с фактической погрешностью.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 16

$$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x + \sqrt{1 - 0.2x^2} = 0. \text{ Найти отрицательные корни.}$$

Требуется

- 1) Отделить корни на указанном интервале.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Вычислить корни методом итераций с точностью $\varepsilon = 0.000001$, выбрав в качестве x_0 то же значение, что и в методе Ньютона.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 17

$$\operatorname{tg}(x) - 2x^2 = 0. \text{ Найти первые три положительные корня.}$$

Требуется

- 1) Отделить корни на указанном интервале.
- 2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
- 3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 4) Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
- 5) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 18

$$e^{-\frac{x}{4}} \sin(\pi x) + 0.1 = 0. \text{ Найти корни, принадлежащие промежутку } [0, 3].$$

Требуется

- 1) Отделить корни на указанном интервале.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.001$ методом хорд. В качестве критерия использовать оценку $|x_k - x^*| \leq |f(x_k)|/m_1$. Сравнить с фактической погрешностью.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 19

$$\lg(x) - \frac{1}{x^2} = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
- 3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 4) Используя интервалы из первого или второго пункта, найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
- 5) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 20

$$\ln(5 - x) + x = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.

- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Вычислить корни методом итераций с точностью $\varepsilon = 0.00001$, выбрав в качестве x_0 то же значение, что и в методе Ньютона.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

1.1.9. Задание 2

Дано уравнение $P_n(x) = 0$, где

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (19)$$

— многочлен Лежандра, корни которого являются узлами квадратурной формулы Гаусса. Требуется, используя метод Ньютона, вычислить указанный по номеру (по возрастанию) корень многочлена Лежандра с заданной точностью ε .

Для реализации метода Ньютона должна быть создана подпрограмма с параметрами:

- x_0 — нулевое приближение к корню;
- ε — заданная точность;
- k_{\max} — максимальное количество итераций (для исключения заикливания);
- x^* — “точное” значение корня¹.

Подпрограмма должна возвращать либо x_k такое, что $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, либо $x_{k_{\max}}$ и количество итераций.

Результаты оформить в виде таблицы 2.

Таблица 2

k	x_k	$x_k - x_{k-1}$	$x_k - x^*$	$P_n(x_k)$
0		—		
1				
...

Замечание 3. Нулевое приближение к корню удобно вычислять по формуле

$$x_0(i) = -\cos\left(\frac{i - 1/4}{n + 1/2} \pi\right). \quad (20)$$

Здесь i — номер корня, n — степень многочлена Лежандра.

Замечание 4. Многочлен Лежандра (19) является частным случаем многочлена Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ при $\alpha = \beta = 0$. Приведем необходимые сведения об этих многочленах. Нам потребуется частный случай многочленов, когда $\alpha = \beta = k$ — целое число.

$$1) P_0^{(k, k)}(x) = 1, \quad P_1^{(k, k)}(x) = (k + 1)x.$$

¹“Точное” значение корня можно найти или встроенной функцией или методом Ньютона с $\varepsilon = 10^{-15}$.

2) Три последовательных многочлена Якоби связаны рекуррентной формулой:

$$P_{n+2}^{(k,k)}(x) = \frac{(n+k+2)(2n+2k+3)x \cdot P_{n+1}^{(k,k)}(x) - (n+k+2)(n+k+1)P_n^{(k,k)}(x)}{(n+2k+2)(n+2)},$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

3) Правила дифференцирования многочленов Якоби:

$$\left[P_n^{(k,k)}(x) \right]' = \frac{n+2k+1}{2} P_{n-1}^{(k+1,k+1)}(x), \quad n \geq 1.$$

Для вычисления значения многочлена и его производной в точке предпочтительнее использовать вышеприведенную рекуррентную формулу, так как счет многочлена через его коэффициенты неустойчив при больших значениях n .

Как видно, в данном случае понадобится вычислять не только $P_n^{(0,0)}(x)$, но и $P_{n-1}^{(1,1)}(x)$.

В связи с этим для реализации метода потребуется создать подпрограмму с параметрами:

- n — степень многочлена;
- k — верхний индекс у многочлена Якоби;
- x — точка, в которой вычисляется значение многочлена.

Эта подпрограмма на языке MATLAB может иметь, например, следующее содержание:

```
function tmp=Presx(n,k,x)
tmp0=1;
tmp1=(k+1)*x;
tmp=tmp1;
    for i=1:n-1
        tmp=((i+k+2)*(2*i+2*k+3)*x*tmp1-(i+k+2)*(i+k+1)*tmp0)/((i+2*k+2)*(i+2));
        tmp0=tmp1;
        tmp1=tmp;
    end
end
```

1.2. Метод Ньютона для решения нелинейной системы второго порядка

Дана система

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

где $f(x, y)$, $g(x, y)$ достаточно гладкие функции.

В результате действий, аналогичных случаю одного уравнения, т. е. приближенно заменяя систему (21) линейной системой, получаем следующие расчетные формулы:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{dx^{(k)}}{d^{(k)}}, \quad y_{k+1} = y_k - \frac{dy^{(k)}}{d^{(k)}},$$

где

$$d^{(k)} = \begin{vmatrix} f'_x(x_k, y_k) & f'_y(x_k, y_k) \\ g'_x(x_k, y_k) & g'_y(x_k, y_k) \end{vmatrix},$$

$$d_x^{(k)} = \begin{vmatrix} f(x_k, y_k) & f'_y(x_k, y_k) \\ g(x_k, y_k) & g'_y(x_k, y_k) \end{vmatrix}, \quad d_y^{(k)} = \begin{vmatrix} f'_x(x_k, y_k) & f(x_k, y_k) \\ g'_x(x_k, y_k) & g(x_k, y_k) \end{vmatrix}.$$

1.2.1. Задание

Требуется найти все решения системы уравнений или решения в заданной области с заданной точностью $\varepsilon=0.00001$.

Программа должна содержать подпрограмму для уточнения решения методом Ньютона с параметрами:

x_0, y_0 — нулевое приближение к корню;

ε — заданная точность;

k_{\max} — максимальное количество итераций (для исключения заикливания).

Подпрограмма должна возвращать либо приближение (x_k, y_k) такое, что

$$\|(x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1})\| < \varepsilon, \text{ либо } (x_{k_{\max}}, y_{k_{\max}}).$$

Здесь норма вектора $(x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1})$ может быть вычислена, например, следующим образом:

$$\|(x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1})\| = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}.$$

Отчет должен содержать

- 1) Графики функций $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ для выбора начального приближения, выполненные, например, в математическом пакете Maple.

Для этого следует объявить функции $f(x, y)$, $g(x, y)$, подключить пакет, содержащий функцию `implicitplot()` для построения графиков неявно заданных функций, и обратиться к ней.

Образец:

```
> f:=(x,y)->exp(y-0.1*x)-x*y-1.4;
> g:=(x,y)->x^2-2*y^2-4;

> with(plots):
> implicitplot({f(x,y)=0,g(x,y)=0},x=-4..4,y=-3..3);
```

- 2) Уточнение начального приближения до тех пор, пока $\|(x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1})\| > \varepsilon$, методом Ньютона.

Результаты оформить в виде таблицы 3.

Таблица 3

k	x_k	y_k	$\ (x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1})\ $	$f(x_k, y_k)$	$g(x_k, y_k)$
0			—		
1					
...					

1.2.2. Варианты систем

Вариант 1

$$\begin{cases} \sin(x - 0.5y) - x + y^2 = 0, \\ (y + 0.1)^2 + x^2 = 0.6. \end{cases}$$

Вариант 2

$$\begin{cases} \sin(x + y) - 1.5x = -0.2, \\ y^2 + x^2 = 1. \end{cases}$$

Вариант 3

$$\begin{cases} \frac{x}{e^{y-10}} - yx = 1.4, \\ x^2 + 2y^2 = 4. \end{cases}$$

Вариант 4

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(x - y - 0.2) = xy, \\ 0.7x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

Вариант 5

$$\begin{cases} \sin(x - 0.5y) = x - y^2, \\ (y + 0.1)^2 + x^2 = 0.7. \end{cases}$$

Вариант 6

$$(y + 0.1)^2 + x^2 = 0.2,$$

$$x - y^2 = 0.37731.$$

Вариант 7

$$\begin{cases} \sin(x - 0.4y) = x - y^2, \\ (y + 0.1)^2 + x^2 = 0.7. \end{cases}$$

Вариант 8

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(y - 0.8x) + 0.8xy = 0.3, \\ x^2 + y^2 = 1.7. \end{cases}$$

Вариант 9

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(y - 0.2x) + 0.2xy = 0.3, \\ x^2 + y^2 = 1.7. \end{cases}$$

Вариант 10

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(x - y - 0.2) = xy, \\ 0.5x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

Вариант 11

$$\begin{cases} e^{x+y} + y = x^2, \\ (x + 0.5)^2 + y^2 = 2. \end{cases}$$

Вариант 12

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0.1) = x^2, \\ 0.5x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

Вариант 13

$$\begin{cases} \sin(x + y) - 1.5x = -0.2, \\ y^2 + 0.5x^2 = 1. \end{cases}$$

Вариант 14

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0.4) = x^2, \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

Вариант 15

$$\begin{cases} \cos(x^2 + 0.6y) + x^2 + y^2 = 1.6, \\ 1.5(x + 0.1)^2 - (y - 0.1)^2 = 1.4. \end{cases}$$

Вариант 16

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2.1, \\ \frac{x^2}{2} - y^2 = 0.15269. \end{cases}$$

Вариант 17

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} - y^2 = 0.75, \\ \frac{y^2}{4} + x^2 = 3.58595. \end{cases}$$

Вариант 18

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1.3, \\ x - y^2 - y = -0.22456. \end{cases}$$

2. Интерполирование по значениям функции.

Интерполяционный многочлен в форме Ньютона.

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

2.1. Постановка задачи интерполирования

Пусть на промежутке $[a, b]$ задана таблица значений вещественной функции $y = f(x)$:

x	$f(x)$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
\dots	\dots
x_n	$f(x_n)$

Узлы предполагаются попарно различными: $x_i \neq x_j$, $i \neq j$.

Требуется найти значение функции в точке $x = \bar{x}$, не совпадающей с узлами.

Приближенное значение функции $f(\bar{x})$ может быть найдено как значение интерполяционного многочлена: $f(\bar{x}) \approx P_n(\bar{x})$, где $P_n(x)$ строится единственным образом из условий $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Погрешность интерполирования находится из теоремы

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ имеет конечную непрерывную производную $f^{(n+1)}(x)$ на наименьшем отрезке $[c, d]$, содержащем узлы интерполирования x_0, x_1, \dots, x_n и точку интерполирования \bar{x} , так что $c = \min\{x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}\}$, $d = \max\{x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}\}$.

Тогда существует такая точка $\xi = \xi(\bar{x})$, $c < \xi < d$, что

$$R_n(f, \bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(\bar{x}), \quad \omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad (1)$$

Оценка погрешности вычисляется следующим образом:

$$|R_n(\bar{x})| \leq M_{n+1} \cdot \frac{|(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) \cdots (\bar{x} - x_n)|}{(n+1)!}, \quad (2)$$

где

$$M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(x)|, \quad x \in [c, d].$$

Часто практически строится многочлен $P_m(x)$, где $m < n$, по $m+1$ узлу. Очевидно, что из $n+1$ узла следует выбрать такие $m+1$, которые обеспечивают наименьшую погрешность, т.е. узлы, ближайšie к точке интерполирования \bar{x} .

При построении интерполяционного многочлена в виде $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ коэффициенты a_i являются решением системы $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Определитель этой системы — определитель Вандермонда. Он отличен от нуля, так как узлы попарно различны.

Удобнее строить многочлен в форме Ньютона или в форме Лагранжа.

Образец выполнения задания

Пусть $f(x) = x^3 + 2$, узлы: -2, 0, 1, 3, 4, 5. Точка интерполирования $\bar{x} = 2$. Точное значение функции $f(2) = 10$.

Построение интерполяционного многочлена в форме Ньютона с использованием разделенных разностей

1) Заполняем таблицу 1 разделенных разностей.

Таблица 1

x	$f(x)$	р.р. 1-ого п.	р.р. 2-ого п.	р.р. 3-его п.
-2	-6			
		4		
0	2		-1	
		1		1
1	3		4	
		13		1
3	29		8	
		37		1
4	66		12	
		61		
5	127			
2	?			

2) Получаем аналитические выражения для интерполяционных многочленов и погрешности по следующим формулам:

$$P_0(\bar{x}) = f(x_0).$$

$$P_1(\bar{x}) = P_0(\bar{x}) + f(x_0, x_1)(\bar{x} - x_0).$$

$$P_2(\bar{x}) = P_1(\bar{x}) + f(x_0, x_1, x_2)(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1).$$

$$P_3(\bar{x}) = P_2(\bar{x}) + f(x_0, x_1, x_2, x_3)(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2).$$

$$M_{i+1} = \max |f^{(i+1)}(x)|, x \in [c, d], \text{ где}$$

$$c = \min(x_0, x_1, \dots, x_i, \bar{x}), d = \max(x_0, x_1, \dots, x_i, \bar{x}).$$

$$|R_i(\bar{x})| \leq M_{i+1} \cdot \frac{|(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) \cdots (\bar{x} - x_i)|}{(i+1)!}.$$

3) Заполняем таблицу результатов 2.

Таблица 2

i	0	1	2	3
Узлы в порядке очередности их использования	1	3	0	4
$P_i(2)$ — значение многочлена в точке интерполирования	3	16	12	10
$f(2) - P_i(2)$ — фактическая погр.	7	-6	-2	0
M_{i+1} — оценка модуля произв.	12	18	6	0
$R_i(2)$ — оценка погрешности	12	9	2	0

2.4. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа имеет вид:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\omega'_{n+1}(x_k)} f(x_k) = \sum_{k=0}^n \frac{\prod_{i \neq k} (x - x_i)}{\prod_{i \neq k} (x_k - x_i)} f(x_k). \quad (5)$$

2.5. Задание

1) Дана функция $y = f(x)$, узлы, значение функции \bar{y} . Получить таблицу значений функции в узлах.

Требуется приближенно найти такое \bar{x} , что $f(\bar{x}) = \bar{y}$ тремя способами:

- “точно”, используя аналитическое выражение обратной функции. Обозначим x^* .
- аппроксимацией функции $f(x)$ интерполяционным многочленом $P_n(x)$ ($n \geq 2$) в форме Лагранжа и приближенным решением уравнения $P_n(x) = \bar{y}$ методом итераций или методом секущих. Обозначим решение уравнения $P_n(x) = \bar{y}$ через x_{iter} .
- если существует однозначная обратная функция $f^{-1}(y)$, то поменять ролями узлы и значения функции и приближенно заменить обратную функцию интерполяционным многочленом $Q_m(y)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) в форме Лагранжа и вычислить $x_m = Q_m(\bar{y})$.

Результаты привести в таблицах вида

m	x_m	$x_m - x_{m-1}$	$x_m - x^*$
0		—	
1			
2			
...			

2* Дана функция $y = f(x)$, $[a, b] = [-1, 1]$.

Требуется построить при различных n интерполяционные многочлены $P_n(x)$ в форме Лагранжа по равноотстоящим узлам и по узлам многочлена Чебышева. Сравнить на графике с функцией в одних осях координат.

Указание

Составить подпрограмму с параметрами:

- интерполируемая функция;
- степень многочлена;
- массив узлов.

Подпрограмма должна возвращать аналитическое выражение интерполяционного многочлена в форме Лагранжа заданной степени по заданной таблице узлов для заданной функции.

Рассмотреть функции: а) $\sin(x)$; б) $|x|$; в) $\frac{1}{1 + 25x^2}$.

2.6. Варианты заданий на прямое и обратное интерполирование

Номер варианта	Функция	Узлы	Точка интерполирования	Значение функции
1	$\sin(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, 0, 0.2	-0.4	-0.56
2	$\arccos(x)$	0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.6	0.35	0.75
3	$\sqrt[4]{x+2}$	0, 2, 4, 5, 7, 10	3	1.6
4	$\sin(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, 0, 0.1	-0.4	-0.6
5	$\cos(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, -0.1, 0	-0.4	0.8
6	$\sqrt[4]{x+2}$	0, 3, 5, 7, 8, 9	4	1.3
7	$\arcsin(x)$	-0.6, -0.5, -0.4, -0.2, 0, 0.1	-0.3	-0.8
8	e^x	-0.3, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.3	0.2	0.8
9	$\ln(x)$	1, 3, 5, 6, 8, 10	4	2
10	$\ln(x)$	1, 3, 5, 6, 8, 10	7	2.5
11	$\arcsin(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, 0, 0.2	0.6	0.8
12	$\sin(x)$	0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.5, 0.8	0.4	0.56
13	$\arccos(x)$	0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.6	0.35	0.75
14	$\sqrt[4]{x+2}$	0, 2, 4, 5, 7, 10	3	1.6
15	$\sin(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, 0, 0.1	-0.4	-0.6

3. Интерполирование в случае равностоящих узлов. Конечные разности. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона

3.1. Постановка задачи интерполирования

Пусть на промежутке $[a, b]$ задана таблица значений вещественной функции $y = f(x)$:

x	$f(x)$
a	$f(a)$
$a + h$	$f(a + h)$
$a + 2h$	$f(a + 2h)$
\dots	\dots
$a + nh = b$	$f(a + nh)$

Требуется найти значение функции в точке $x = \bar{x}$, не совпадающей с узлами. Обозначим $h = (b - a)/n$, $x_i = a + ih$, $f(x_i) = y_i$.

3.2. Конечные разности

При построении интерполяционного многочлена по равностоящим узлам могут быть использованы конечные разности, которые играют роль, подобную той, которую играют производные для функций с непрерывно изменяющимся аргументом. Конечная разность первого порядка в точке x_i определяется следующим образом: $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$.

Конечные разности высших порядков определяются рекурсивно

$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$ — конечная разность k -ого порядка в точке x_i .

Конечные разности можно выразить непосредственно через значения функций

$$\Delta^n y_i = y_{i+n} - n y_{i+n-1} + \dots + (-1)^k C_n^k y_{i+n-k} + \dots + (-1)^n y_i = (S - 1)^n y_i.$$

Здесь S — оператор сдвига, так что $S^k y_i = y_{i+k}$.

Обратим внимание на очевидное свойство конечной разности

$$\Delta^n P_n(x) \equiv \text{const.}$$

Конечные разности принято записывать в таблицу вида таблицы 1.

Пусть значения функции в узлах интерполирования заданы с точностью ε (например, $\varepsilon = 1/2 \cdot 10^{-5}$). Тогда конечные разности имеет смысл вычислять лишь до тех пор, пока они не будут “постоянными” с учётом ошибки округления ε в значениях функции, т. е. до тех пор, пока $|\Delta^k y_j - \Delta^k y_i| \leq 2^{k+1} \varepsilon = 2^k \cdot 10^{-5}$ (2^k единиц младшего разряда). Число $k \leq n$ принимаем за степень искомого интерполяционного полинома. Полином будет строиться по $(k+1)$ узлу, которые следует выбирать таким образом, чтобы обеспечить минимальную по абсолютной величине погрешность (разность между значением функции и значением полинома) в точке интерполяции \bar{x} . Для этого в качестве x_0 следует выбирать ближайший к \bar{x} узел. В качестве x_1 выбирать ближайший из оставшихся и т. д. Это следует из теоремы об остатке интерполирования. В связи с этим рассматриваются три варианта расположения точки интерполирования \bar{x} .

Таблица 1

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
a	y_0			
		Δy_0		
$a + h$	y_1		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$
$a + 2h$	y_2		$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		\dots
$a + 3h$	y_3		\dots	
		\dots		\dots
\dots	\dots		\dots	
		Δy_{n-3}		$\Delta^3 y_{n-4}$
$b - 2h$	y_{n-2}		$\Delta^2 y_{n-3}$	
		Δy_{n-2}		$\Delta^3 y_{n-3}$
$b - h$	y_{n-1}		$\Delta^2 y_{n-2}$	
		Δy_{n-1}		
$b = a + nh$	y_n			

3.3. Построение интерполяционного многочлена в зависимости от расположения точки интерполирования

3.3.1. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона для начала таблицы

Пусть точка интерполирования \bar{x}_1 удовлетворяет условию $a < \bar{x}_1 \leq a + h/2$. Узлы следует выбирать в следующем порядке: $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, \dots , $x_n = a + nh$.

В этом случае из таблицы 1 используются значения y_0 , Δy_0 , $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0, \dots$, $\Delta^n y_0$, отмеченные в таблице 1 красным цветом.

Обозначим $t = (\bar{x}_1 - a)/h$, тогда интерполяционный многочлен примет следующий вид

$$\begin{aligned}
 P_n(a + th) = & y_0 + t \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots + \\
 & + \frac{t(t-1) \dots (t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Представим $P_n(t)$ в виде

$$P_n(a + th) = \sum_{k=0}^n N_k(t) \Delta^k y_0,$$

где $\Delta^0 y_0 = y_0$, $N_0 = 1$, $N_1 = t$, \dots , $N_k = \frac{N_{k-1} \cdot (t - k + 1)}{k}$.

Вычисления рекомендуется оформить в виде таблицы 2.

Таблица 2

k	0	1	2	3	4
$\Delta^k y_0$					
$N_k(t)$					
$N_k \cdot \Delta^k y_0$					
$P_k(\bar{x}_1)$					
$f(\bar{x}_1) - P_k(\bar{x}_1)$					
$ R_k(\bar{x}_1) \leq$					

В ячейки таблицы следует записывать значения согласно обозначениям, помещённым в первом столбце. В предпоследней строке будут получаться значения многочленов в точке интерполирования нулевой, первой, второй и т. д. степеней. Как видно из формулы

$$P_k(t) = P_{k-1}(t) + N_k(t) \Delta^k y_0,$$

$P_k(t)$ для $k > 0$ получается сложением значений, находящихся левее по строке и выше по столбцу. Количество цифр после запятой должно быть согласовано с ε . Часто в учебных целях рассматривается модельная задача, т. е. такая, в которой известно аналитическое выражение для интерполируемой функции. В этом случае следует вычислить “точное” значение функции в точке \bar{x}_1 , привести его рядом с таблицей, привести в последней строке фактические погрешности, проанализировать результаты.

Напомним, что выражение для погрешности интерполирования определяется теоремой:

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ имеет конечную непрерывную производную $f^{(n+1)}(x)$ на наименьшем отрезке $[c, d]$, содержащем узлы интерполирования x_0, x_1, \dots, x_n и точку интерполирования \bar{x} , так что $c = \min\{x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}\}$, $d = \max\{x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}\}$.

Тогда существует такая точка $\xi = \xi(\bar{x})$, $c < \xi < d$, что

$$R_n(f, \bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(\bar{x}), \quad \omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

В данном случае, учитывая, что узлы равноотстоящие с шагом h и $t = (\bar{x} - a)/h$, $R_n(f, \bar{x})$ примет вид

$$R_n(f, \bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{t(t-1) \cdots (t-n+1) \cdot (t-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi).$$

Оценка погрешности значения многочлена k -ой степени в нижней строке таблицы 2 вычисляется следующим образом:

$$|R_k(\bar{x})| \leq M_{k+1} \cdot |N_{k+1}| h^{k+1},$$

где

$$M_{k+1} = \max |f^{(k+1)}(x)|, \quad x \in [a, a + kh].$$

3.3.2. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона для конца таблицы

Пусть теперь требуется найти значение интерполяционного многочлена в точке \bar{x}_2 такой, что $b - h/2 \leq \bar{x}_2 < b$. Узлы следует выбирать в следующем порядке: $b, b - h, b - 2h$ и т. д. Соответственно используются значения $y_n, \Delta y_{n-1}, \Delta^2 y_{n-2}, \Delta^3 y_{n-3}$ и т. д., отмеченные в таблице 1 синим цветом.

Обозначим $t = (\bar{x}_2 - b)/h$, тогда

$$P_n(b + th) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (2)$$

Представим $P_n(t)$ в виде

$$P_n(b + th) = \sum_{k=0}^n N_k(t)\Delta^k y_{n-k},$$

где $\Delta^0 y_n = y_n, N_0 = 1, N_1 = t, \dots, N_k = \frac{N_{k-1}(t+k-1)}{k}$.

Вычисления рекомендуется оформить в виде таблицы, аналогичной таблице 2.

3.3.3. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона-Гаусса для середины таблицы (интерполирование вперед)

Пусть a — узел в середине таблицы, т. е. в отличие от предыдущих случаев имеются узлы и левее и правее данного. Приведем фрагмент таблицы конечных разностей, где $y_i = f(a + ih)$.

Таблица 3

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$a - 3h$	y_{-3}				
		Δy_{-3}			
$a - 2h$	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$	
$a - h$	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$	
a	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$	
$a + h$	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
$a + 2h$	y_2		$\Delta^2 y_1$		
		Δy_2			
$a + 3h$	y_3				

Пусть требуется найти значение интерполяционного многочлена в точке \bar{x}_3 , такой что $a < \bar{x}_3 \leq a + h/2$. Узлы следует выбирать в следующем порядке: $a, a + h, a - h, a + 2h, a - 2h$ и т. д. Соответственно используются значения $y_0, \Delta y_0, \Delta^2 y_{-1}, \Delta^3 y_{-1}$ и т. д., отмеченные в таблице 3 цветом *magenta*.

Обозначим $t = (\bar{x}_3 - a)/h$, тогда

$$P_n(a + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{t(t-1)(t+1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \dots + \frac{t(t-1) \dots (t - (-1)^n \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)}{n!} \Delta^n y_{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \quad (3)$$

Представим $P_n(t)$ в виде

$$P_n(a + th) = \sum_{k=0}^n N_k(t) \Delta^k y_{-\lfloor \frac{k}{2} \rfloor},$$

где $N_0 = 1$, $N_1 = t$ и т. д.

Здесь выражение $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ означает целую часть от деления k на 2.

Вычисления следует оформить в виде таблицы, аналогичной таблице 2.

Упражнения

- 1) Написать и проиллюстрировать на примере формулу для интерполяционного многочлена Ньютона-Гаусса для середины таблицы (интерполирование назад).
- 2) Проиллюстрировать на примере применение формул для интерполяционных многочленов для случая экстраполирования а) $\bar{x} < a$; б) $\bar{x} > b$.
- 3) Написать и проиллюстрировать на примере формулу для интерполяционного многочлена, если $a + h/2 < \bar{x} < a + h$.
- 4) Написать и проиллюстрировать на примере формулу для интерполяционного многочлена, если $b - h < \bar{x} < b - h/2$.

3.4. Задание

Дана функция $f(x)$, промежуток $[a, b]$, точки интерполирования. Требуется

- 1) Построить таблицу значений функции по равноотстоящим узлам с шагом $h = 0.1$ на $[a, b]$, округлив значения функции до пятого знака после запятой ($\varepsilon = 1/2 \cdot 10^{-5}$).
- 2) Построить таблицу конечных разностей до четвертого порядка.
- 3) Вычислить значение функции в точках интерполирования, используя интерполяционный многочлен $P_n(x)$ ($n = 0, \dots, 4$) в форме Ньютона по заданным узлам.
- 4) Сравнить с точным значением функции.
- 5) Получить оценку погрешности.

Представить результаты в виде таблицы 2.

3.5. Варианты заданий

- 1) $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [0.5, 1.5]$, $\bar{x}_1 = 0.55$, $\bar{x}_3 = 1.05$.
- 2) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [0.5, 1.5]$, $\bar{x}_1 = 0.45$, $\bar{x}_3 = 0.95$.
- 3) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [-0.5, 0.5]$, $\bar{x}_2 = 0.45$, $\bar{x}_3 = 0.05$.
- 4) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [0.5, 1.5]$, $\bar{x}_1 = 0.45$, $\bar{x}_3 = 0.95$.
- 5) $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [0.5, 1.5]$, $\bar{x}_2 = 1.55$, $\bar{x}_3 = 1.05$.
- 6) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [2.5, 3.5]$, $\bar{x}_2 = 2.55$, $\bar{x}_3 = 3.15$.
- 7) $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [5, 6]$, $\bar{x}_1 = 5.05$, $\bar{x}_3 = 5.35$.
- 8) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [-3.5, -2.5]$, $\bar{x}_2 = -2.55$, $\bar{x}_3 = -3.05$.
- 9) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [5.5, 6.5]$, $\bar{x}_1 = 5.45$, $\bar{x}_3 = 6.25$.
- 10) $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [-0.5, 0.5]$, $\bar{x}_2 = 0.45$, $\bar{x}_3 = 0.05$.
- 11) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [3.5, 4.5]$, $\bar{x}_1 = 3.45$, $\bar{x}_3 = 3.95$.
- 12) $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [0.5, 1.5]$, $\bar{x}_2 = 1.55$, $\bar{x}_3 = 1.05$.
- 13) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [-7.5, -6.5]$, $\bar{x}_1 = -7.65$, $\bar{x}_3 = -6.95$.
- 14) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [2.5, 3.5]$, $\bar{x}_2 = 2.45$, $\bar{x}_3 = 3.05$.
- 15) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [0.5, 1.5]$, $\bar{x}_1 = 0.55$, $\bar{x}_3 = 1.05$.
- 16) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [4.5, 5.5]$, $\bar{x}_1 = 4.45$, $\bar{x}_3 = 5.95$.
- 17) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [-0.5, 0.5]$, $\bar{x}_2 = 0.45$, $\bar{x}_3 = 0.05$.
- 18) $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [0.5, 1.5]$, $\bar{x}_1 = 0.35$, $\bar{x}_3 = 1.35$.
- 19) $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [0.5, 1.5]$, $\bar{x}_2 = 1.55$, $\bar{x}_3 = 1.05$.
- 20) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [-1.5, -0.5]$, $\bar{x}_1 = -1.55$, $\bar{x}_3 = -1.05$.
- 21) $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [2.5, 3.5]$, $\bar{x}_2 = 2.48$, $\bar{x}_3 = 2.95$.
- 22) $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [5, 6]$, $\bar{x}_1 = 4.95$, $\bar{x}_3 = 5.35$.
- 23) $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [6.3, 7.3]$, $\bar{x}_1 = 6.25$, $\bar{x}_3 = 6.95$.
- 24) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [4, 5]$, $\bar{x}_2 = 5.05$, $\bar{x}_3 = 4.35$.

4. Интерполирование Эрмита с использованием разделенных разностей

4.1. Постановка задачи

Дан $m + 1$ узел, каждый узел x_i имеет кратность r_i , т. е. в нём задано значение функции и значения производных до $(r_i - 1)$ -ого порядка. Исходные данные приведем в виде таблицы:

x_0	x_1	\dots	x_m
$f(x_0)$	$f(x_1)$	\dots	$f(x_m)$
$f'(x_0)$	$f'(x_1)$	\dots	$f'(x_m)$
\dots	\dots	\dots	\dots
$f^{(r_0-1)}(x_0)$	$f^{(r_1-1)}(x_1)$	\dots	$f^{(r_m-1)}(x_m)$

Предполагаем, что $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$.

Пусть $r_0 + r_1 + \dots + r_m = r$. Существует единственный многочлен $H_{r-1}(x)$, удовлетворяющий условиям: $H_{(r-1)}^{(\alpha_j)}(x_j) = f^{(\alpha_j)}(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, m$, $\alpha_j = 0, \dots, r_j - 1$.

Частные случаи:

1. $r_0 = r_1 = \dots = r_m = 1$ — обычное интерполирование по значениям функции.
2. $m = 0$, тогда $H_{r_0-1}(x)$ — отрезок ряда Тейлора:

$$H_{r_0-1}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(r_0-1)}(x_0)}{(r_0 - 1)!}(x - x_0)^{r_0-1}. \quad (1)$$

Разделенные разности по кратным узлам вычисляются по следующей формуле:

$$f(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{k+1}) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}. \quad (2)$$

4.2. Задание. Образец выполнения задания

Дана таблица попарно различных узлов, в которых заданы значения функции и значения производных до некоторого порядка. Требуется построить аналитическое выражение интерполяционного полинома Эрмита по данной таблице, используя таблицу разделенных разностей. Проверить, что построенный полином удовлетворяет заданным условиям.

Образец выполнения задания

Пусть дана таблица

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-1	-17	33	
0	-4	3	-8
2	10		

- 1) Строим таблицу разделенных разностей, повторяя узлы столько раз, какова их кратность. Разделенные разности по некратным узлам вычисляем обычным образом, а разделенная разность k -ого порядка по кратному узлу x_i вычисляется по приведенной выше формуле (2).

x	$f(x)$	р.р. 1 пор	р.р. 2 пор	р.р. 3 пор	р.р. 4 пор	р.р. 5 пор
-1	-17					
		33				
-1	-17		-20			
		13		10		
0	-4		-10		-4	
		3		6		1
0	-4		-4		-1	
		3		3		
0	-4		2			
		7				
2	10					

2) Выпишем интерполяционный многочлен в форме Ньютона:

$$P_5(x) = -17 + 33(x + 1) - 20(x + 1)^2 + 10(x + 1)^2x - 4(x + 1)^2x^2 + (x + 1)^2x^3$$

3) Проверка интерполяционности многочлена:

x	$P_5(x)$	$P_5'(x)$	$P_5''(x)$
-1	-17	33	
0	-4	3	-8
2	10		

4.3. Варианты заданий

Вариант 1

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-1	2	3	6
0	-2	3	-8

Вариант 2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-2	24	39	-42
1	12		

Вариант 3

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
1	12	21	30
0	2	3	

Вариант 4

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-1	2	6	
0	-2	4	12

Вариант 5

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-2	-4		
0	-8	2	-16
1	-8		
2	-148	-278	

Вариант 6

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	5	-7	10
1	-4	-13	
2	-61	-127	
3	-862		

Вариант 7

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	6		
1	-2	-2	
2	-14	-18	-24
3	-30		

Вариант 8

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-1	7		
1	-11	5	-22
2	-5	-1	
3	43		

5. Численное дифференцирование

5.1. Основные формулы численного дифференцирования для функции, заданной аналитически

Предполагается, что функция $f(x)$ достаточно гладкая. Справедливы соотношения (формулы, равенства).

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi), \quad \xi \in (x, x+h), \quad (1)$$

$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ — разность вперед.

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{h}{2} f''(\xi), \quad \xi \in (x-h, x), \quad (2)$$

$\frac{f(x) - f(x-h)}{h}$ — разность назад.

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi), \quad \xi \in (x-h, x+h), \quad (3)$$

$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ — симметричная разность.

$$f'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi), \quad \xi \in (x, x+2h). \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{3f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi), \quad \xi \in (x-2h, x). \quad (5)$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h))}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (x-h, x+h). \quad (6)$$

5.2. Формулы численного дифференцирования для функции, заданной таблично в равноотстоящих узлах

Пусть узлы $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ — равноотстоящие, т.е. $x_{i+1} - x_i = h$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$), и пусть для функции $y = f(x)$ известны значения $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Формулы (1)-(6) перепишем в следующем виде:

$$f'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + O(h), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1a)$$

$$f'(x_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + O(h), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2a)$$

$$f'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2), \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3a)$$

$$f'(x_i) = \frac{-3y_i + 4y_{i+1} - y_{i+2}}{2h} + O(h^2), \quad i = 0, \dots, n-2. \quad (4a)$$

$$f'(x_i) = \frac{3y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{2h} + O(h^2), \quad i = 2, \dots, n. \quad (5a)$$

$$f''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2), \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (6a)$$

5.3. Задание

1) Вычислить приближенно значения

- а) первой производной функции $y = f(x)$ с порядком погрешности $O(h)$ (обозначим \tilde{f}') и $O(h^2)$ (обозначим $\tilde{\tilde{f}}'$) при $i = 0, 1, \dots, n$.
- б) второй производной функции $y = f(x)$ с порядком погрешности $O(h^2)$ (обозначим \tilde{f}'') при $i = 1, \dots, n-1$.

Напечатать таблицу значений узлов, “точных” значений производных в узлах, приближенных значений производных и их разностей (фактические погрешности) (см. образец). Проверить результаты на многочленах соответствующих степеней. Объяснить полученные результаты.

Образец выполнения задания для функции $f(x) = x + 3$ представлен в таблице 1.

Таблица 1

x	$f(x)$	$f'(x)$	\tilde{f}' $O(h)$	погр. $O(h)$	$\tilde{\tilde{f}}'$ $O(h^2)$	погр. $O(h^2)$	$f''(x)$	\tilde{f}'' $O(h^2)$	погр. $O(h^2)$
0	3	1	1	0	1	0	0		
0,1	3,1	1	1	0	1	0	0	0	0
0,2	3,2	1	1	0	1	0	0	0	0
0,3	3,3	1	1	0	1	0	0	0	0
0,4	3,4	1	1	0	1	0	0	0	0
0,5	3,5	1	1	0	1	0	0	0	0
0,6	3,6	1	1	0	1	0	0	0	0
0,7	3,7	1	1	0	1	0	0	0	0
0,8	3,8	1	1	0	1	0	0	0	0
0,9	3,9	1	1	0	1	0	0	0	0
1	4	1	1	0	1	0	0		

- 2) Пользуясь одной из формул (1)-(6) (указывается преподавателем) в заданной точке x вычислить разностную производную первого или второго порядка, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

Пример:

При использовании формулы (4) в результате ошибок, допускаемых в каждом значении функции и не превосходящих по модулю ε , оценка для суммарной погрешности будет выглядеть следующим образом:

$$|R_\varepsilon(x, h, f)| \leq \frac{8\varepsilon}{2h} + \frac{h^2}{3} M_3, \quad M_3 = \max |f'''(\xi)|, \quad \xi \in (x, x + 2h).$$

Оптимальный шаг, т. е. такой, при котором обеспечивается минимальная суммарная погрешность, находится обычным образом, как решение задачи на экстремум.

Напечатать таблицу значений h , “точных” значений производной в точке, приближенных значений производной и их разностей (фактические погрешности).

Образец выполнения задания для функции $f(x) = e^{2x}$ представлен в таблице 2.

Здесь $x = 1$, начальный шаг $h = 0.1$, “точное” значение производной $f'(1) = 14.778112$. Значения функции округляются до пятого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

Таблица 2

h	0.1	0.05	0.025	0.0125	0.00625	0.003125
f_x пор. $O(h^2)$	14.5484	14.7249	14.765	14.774	14.7768	14.7744
погр.	0.22971	0.05321	0.01311	0.0037	0.0013122	0.003712

Из таблицы видно, что оптимальным экспериментально является шаг 0.00625, теоретически $h_{opt} \approx 0.0069$.

5.4. Варианты заданий

Вариант 1

- 1) Выполнить пункт 1 из задания.
- 2) Пользуясь формулой (3) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{2x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты. Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.
- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_0$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 2

- 1) Выполнить пункт 1 из задания.
- 2) Пользуясь формулой (4) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{3x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты. Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_1$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 3

- 1) Выполнить пункт 1 из задания.
- 2) Пользуясь формулой (5) в точке $x = 2$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{2x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты. Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.
- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах x_0, x_1, x_2, x_3 .

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_2$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 4

- 1) Выполнить пункт 1 из задания.
- 2) Пользуясь формулой (6) в точке $x = 1$ вычислить вторую разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{2x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты. Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.
- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_n$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 5

- 1) Выполнить пункт 1 из задания. Вычислить приближенно значения:
- 2) Пользуясь формулой (6) в точке $x = 1$ вычислить вторую разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{3x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.
Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения второй производной с первым порядком аппроксимации в точке $x = x_0$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 6

- 1) Выполнить пункт 1 из задания.
- 2) Пользуясь формулой (4) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{4x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.
Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения второй производной с первым порядком аппроксимации в точке $x = x_n$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 7

- 1) Выполнить пункт 1 из задания.
- 2) Пользуясь формулой (5) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{5x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.
Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_0$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 8

- 1) Выполнить пункт 1 из задания.
- 2) Пользуясь формулой (6) в точке $x = 2$ вычислить вторую разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{2x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.
- Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_1$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 9

- 1) Выполнить пункт 1 из задания.
- 2) Пользуясь формулой (3) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{2x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.
- Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_0$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 10

- 1) Выполнить пункт 1 из задания.
- 2) Пользуясь формулой (4) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{3x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты. Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.
- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_1$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 11

- 1) Выполнить пункт 1 из задания.
- 2) Пользуясь формулой (5) в точке $x = 2$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{2x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты. Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.
- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах x_0, x_1, x_2, x_3 .

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_2$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 12

- 1) Выполнить пункт 1 из задания.
- 2) Пользуясь формулой (6) в точке $x = 1$ вычислить вторую разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{2x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты. Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах x_0, x_1, x_2, x_3 .

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_3$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 13

- 1) Выполнить пункт 1 из задания. Вычислить приближенно значения:
- 2) Пользуясь формулой (6) в точке $x = 1$ вычислить вторую разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{3x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.
- Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения второй производной с первым порядком аппроксимации в точке $x = x_0$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 14

- 1) Выполнить пункт 1 из задания.
- 2) Пользуясь формулой (4) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{4x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.
- Значения функции округлять до 5-ого знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения второй производной с первым порядком аппроксимации в точке $x = x_n$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

6. Приближенное вычисление интегралов по простейшим формулам

6.1. Общие сведения

Квадратурная формула имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (1)$$

где A_k — коэффициенты, x_k — узлы квадратурной формулы, они попарно различны, т. е. $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. В дальнейшем предполагается, что $x_k \in [a, b]$, $k = 1, 2, \dots, n$.¹

Сумма в правой части формулы (1) называется квадратурной суммой.

Квадратурная формула называется интерполяционной, если

$$A_k = \int_a^b \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} dx, \quad \omega(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i). \quad (2)$$

Важной характеристикой квадратурной формулы является ее алгебраическая степень точности.

Определение. Целое неотрицательное число d называется алгебраической степенью точности квадратурной формулы, если эта формула точна для всех многочленов степени не выше d и не точна для x^{d+1} .

Теорема 1. Для того чтобы квадратурная формула с n попарно различными узлами была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы $d \geq n - 1$.

6.2. Квадратурные формулы прямоугольников

6.2.1. Квадратурная формула левых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b - a)f(a). \quad (3)$$

Очевидно, что ее алгебраическая степень точности $d = 0$ и формула является интерполяционной.

6.2.2. Квадратурная формула правых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b - a)f(b). \quad (4)$$

6.2.3. Квадратурная формула средних прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right). \quad (5)$$

Алгебраическая степень точности $d = 1$ и формула является интерполяционной.

¹В общем случае узлы не обязательно из $[a, b]$.

6.2.4. Составные квадратурные формулы прямоугольников

Разбиваем промежуток интегрирования $[a, b]$ на N равных частей, $h = \frac{(b-a)}{N}$ — длина частичного разбиения. Обозначим $x_k = a + kh$, $f_k = f(x_k)$. Составные квадратурные формулы прямоугольников напишем в следующем виде:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{k=1}^N f(\alpha + (k-1)h), \quad (6)$$

где при $\alpha = a$ получаем формулу левых прямоугольников, при $\alpha = a + h/2$ — средних прямоугольников, при $\alpha = a + h$ — правых прямоугольников. Обратим внимание, что алгебраические степени точности формул остаются прежними и составные квадратурные формулы не являются интерполяционными.

6.3. Квадратурная формула трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)). \quad (7)$$

Составная квадратурная формула трапеций имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2N}(f_0 + 2(f_1 + \dots + f_{N-1}) + f_N). \quad (8)$$

Алгебраическая степень точности формулы трапеций $d = 1$.

6.4. Квадратурная формула Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right). \quad (9)$$

Алгебраическая степень точности квадратурной формулы $d = 3$.

Составная квадратурная формула Симпсона

Разбиваем промежуток интегрирования $[a, b]$ на N равных частей.

Пусть $h = \frac{b-a}{2N}$ — половина длины частичного разбиения.

Обозначим $x_k = a + kh$, $f_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, 2N$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6N} (f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2N-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2N-2}) + f_{2N}). \quad (10)$$

Количество узлов составной формулы Симпсона равно $2N + 1$ — оно нечетно.

Алгебраическая степень точности квадратурной формулы $d = 3$.

6.5. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса

Интерполяционные квадратурные формулы по равноотстоящим узлам на $[a, b]$ (концы отрезка $[a, b]$ являются узлами) называются формулами Ньютона-Котеса. Заметим, что рассмотренные выше формула трапеций (7) и формула Симпсона (9) (не составные) относятся к семейству квадратурных формул Ньютона-Котеса.

Алгебраическая степень точности квадратурной формулы Ньютона-Котеса равна количеству узлов при нечетном их числе (например, формула Симпсона) и на единицу меньше — при четном (например, формула трапеций). Следует отметить, что с ростом числа узлов сумма модулей коэффициентов растёт, т. е. процесс вычисления квадратурной суммы неустойчив.

6.6. Оценка погрешности квадратурных формул

Если функция $f(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную $(d + 1)$ порядка, то для оценки погрешности рассмотренных выше составных квадратурных формул, имеющих алгебраическую степень точности d , справедливо неравенство

$$|R_N(f)| \leq C(b-a) \left(\frac{b-a}{N}\right)^{d+1} M_{d+1}, \quad M_{d+1} = \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(d+1)}(\xi)|. \quad (11)$$

$$\text{Здесь } C = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{в формуле левых и правых прямоугольников;} \\ \frac{1}{24} & \text{в формуле средних прямоугольников;} \\ \frac{1}{12} & \text{в формуле трапеций,} \\ \frac{1}{2880} & \text{в формуле Симпсона.} \end{cases}$$

6.7. Правило Рунге практической оценки погрешности (экстраполяция по Ричардсону)

Будем предполагать, что $f(x)$ имеет непрерывные на $[a, b]$ производные требуемого порядка. Пусть S_N — квадратурная сумма с N разбиениями, S_{2N} — квадратурная сумма с $2N$ разбиениями, I — точное значение интеграла.

Можно показать, что главный член погрешности может быть вычислен следующим образом:

$$R_{main}^{(N)} = \frac{S_{2N} - S_N}{2^{d+1} - 1}. \quad (12)$$

Экстраполяция по Ричардсону выполняется по следующей формуле:

$$I_{adjusted} = S_{2N} + R_{main}^N. \quad (13)$$

Часто последний результат является более точным.

Заметим, что в результате экстраполяции по Ричардсону получаются квадратурные формулы с более высокой алгебраической степенью точности, а именно:

- из формулы левых и правых прямоугольников \Rightarrow формула средних прямоугольников;
- из формулы трапеций \Rightarrow формула Симпсона;
- из формулы Симпсона \Rightarrow квадратурная формула с алгебраической степенью точности $d=5$.

Для достаточно гладких функций при достаточно больших N можно пользоваться следующим критерием: если $|R_{main}^{(N)}| < \varepsilon$, то $|S_{2N} - I| < \varepsilon$.

6.8. Задание

Для заданной функции $f(x)$ вычислить $\int_0^1 f(x) dx$ приближенно по составным квадратурным формулам

а) левых прямоугольников;

б) трапеций;

в) Симпсона.

Результаты оформить в следующем виде (для, например, $N = 2$):

Метод	S_N	$I - S_N$	R_N	S_{2N}	$I - S_{2N}$	R_{2N}	R_{main}	I_{ad}	$I - I_{ad}$
Левых прям.									
Трапеций									
Симпсона									

Протестировать квадратурные формулы на многочленах различных степеней, в зависимости от алгебраической степени точности формулы.

Вычислить $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + c} dx$, где $c > 0$ определяется вариантом задания.

Заметим, что для оценки модуля производной k -ого порядка подынтегральной функции при $x \in [0, 1]$ может быть использовано неравенство

$$\left| \left(\frac{1}{x^2 + c} \right)^{(k)} \right| \leq \frac{k!}{(\sqrt{c})^{k+2}}.$$

7. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности (формулы типа Гаусса)

7.1. Общие сведения

Требуется вычислить приближенно интеграл

$$\int_a^b \varphi(x) dx,$$

где подынтегральная функция может не быть достаточно гладкой на промежутке интегрирования, но представима в виде $\varphi(x) = \rho(x)f(x)$, $\rho(x)$ содержит особенности функции $\varphi(x)$, а $f(x)$ является достаточно гладкой функцией. Далее будем рассматривать квадратурную формулу вида

$$\int_a^b \rho(x)f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (1)$$

где x_k — узлы квадратурной формулы, A_k — коэффициенты,

$\rho(x)$ — весовая функция и должна удовлетворять следующему условию: существуют моменты весовой функции, т. е.

$$|\mu_k| = \left| \int_a^b \rho(x)x^k dx \right| < \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Квадратурная формула будет интерполяционной, если

$$A_k = \int_a^b \rho(x) \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} dx, \quad (2)$$

где $\omega(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$.

Примеры:

$$\int_0^1 x^\alpha \cos x dx, \quad \int_0^1 (1-x)^\alpha e^x dx \quad (\alpha > -1).$$

Далее предполагаем, что

- $\rho(x) \geq 0$ при $x \in [a, b]$;
- $\mu_0 > 0$.

Теорема 1. Для того чтобы квадратурная формула (1) была точна для любого многочлена степени не выше $2n - 1$, необходимо и достаточно, чтобы:

- узлы x_1, x_2, \dots, x_n являлись корнями ортогонального относительно веса $\rho(x)$ и отрезка $[a, b]$ многочлена $w(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$;
- формула (1) была интерполяционной.

Теорема 2. Пусть отрезок интегрирования $[a, b]$ конечен. Если функция $f(x)$ имеет непрерывную на $[a, b]$ производную порядка $2n$, то существует точка $\eta \in [a, b]$, такая что погрешность квадратурной формулы (1) гауссова типа имеет представление

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \int_a^b \rho(x) \omega^2(x) dx.$$

7.2. Построение квадратурной формулы типа Гаусса

Узлы находим из первого условия теоремы

$$\int_a^b \rho(x) \omega_n(x) \omega_i(x) dx = 0, \quad i = 0, 1, \dots, (n-1).$$

Очевидно, что достаточно потребовать ортогональности многочлена $w_n(x)$ относительно веса $\rho(x)$ и отрезка $[a, b]$ к одночленам x^i , $i = 0, 1, \dots, (n-1)$. Таким образом, коэффициенты искомого многочлена $w_n(x)$ являются решением системы

$$\int_a^b \rho(x) (x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n) x^i dx = 0, \quad i = 0, 1, \dots, (n-1).$$

Учитывая обозначения

$$\mu_k = \int_a^b \rho(x) x^k dx,$$

получим следующую систему линейных уравнений относительно a_1, a_2, \dots, a_n :

$$\begin{cases} a_1 \mu_{n-1} & + a_2 \mu_{n-2} & + \dots & + a_n \mu_0 & = & -\mu_n, \\ a_1 \mu_n & + a_2 \mu_{n-1} & + \dots & + a_n \mu_1 & = & -\mu_{n+1}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 \mu_{2n-2} & + a_2 \mu_{2n-3} & + \dots & + a_n \mu_{n-1} & = & -\mu_{2n-1}. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение.

Узлы — решения уравнения $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$ вещественны, различны и лежат внутри отрезка $[a, b]$.

Коэффициенты A_k находятся по формуле (2).

Известно, что $A_k > 0$, $k = 1, \dots, n$.

Алгебраическая степень точности формулы $d = 2n - 1$, формула точно интегрирует многочлены нулевой степени, следовательно

$$\sum_{k=1}^n A_k = \int_a^b \rho(x) dx = \mu_0.$$

Приведем алгоритм построения формулы типа Гаусса для $n = 2$.

1) Вычислить моменты $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$.

2) Построить систему

$$\begin{cases} a_1 \mu_1 + a_2 \mu_0 = -\mu_2, \\ a_1 \mu_2 + a_2 \mu_1 = -\mu_3. \end{cases}$$

3) Вычислить a_1, a_2 , например, по правилу Крамера

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\mu_2 & \mu_0 \\ -\mu_3 & \mu_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_0 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{vmatrix}} = \frac{\mu_0 \mu_3 - \mu_2 \mu_1}{\mu_1^2 - \mu_2 \mu_0},$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} \mu_1 & -\mu_2 \\ \mu_2 & -\mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_0 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{vmatrix}} = \frac{\mu_2^2 - \mu_3 \mu_1}{\mu_1^2 - \mu_2 \mu_0}.$$

4) Решить уравнение $x^2 + a_1 x + a_2 = 0$. Узлы должны быть вещественны, различны и должны принадлежать (a, b) .

5) Вычислить коэффициенты квадратурной формулы.

$$A_1 = \int_a^b \rho(x) \frac{x - x_2}{(x_1 - x_2)} dx = \frac{1}{x_1 - x_2} (\mu_1 - x_2 \mu_0),$$

$$A_2 = \int_a^b \rho(x) \frac{x - x_1}{(x_2 - x_1)} dx = \frac{1}{x_2 - x_1} (\mu_1 - x_1 \mu_0).$$

Проверка: коэффициенты должны быть положительны и $A_1 + A_2 = \mu_0$.

Построена формула:

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k),$$

которая должна быть точна для $f(x) = 1, x, x^2, x^3$.

7.3. Частные случаи формулы типа Гаусса

7.3.1. Формула Гаусса

$\rho(x) \equiv 1, [a, b] = [-1, 1]$. Узлы — корни многочлена Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad (3)$$

а коэффициенты могут быть вычислены по формуле

$$A_k = \frac{2}{(1 - x_k^2) [P_n'(x_k)]^2} = \frac{2(1 - x_k^2)}{n^2 [P_{n-1}(x_k)]^2}. \quad (4)$$

Приведем формулы Гаусса для $n = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x) dx &\approx 2f(0), \\ \int_{-1}^1 f(x) dx &\approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \\ \int_{-1}^1 f(x) dx &\approx \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right).\end{aligned}$$

Погрешность формулы Гаусса имеет оценку

$$|R_n(f)| \leq \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} M_{2n} = C_n M_{2n}, \quad (5)$$

$$\text{где } M_{2n} = \max |f^{(2n)}(\xi)|, \xi \in [-1, 1].$$

Отметим, что коэффициенты C_n быстро убывают:

$$C_1 = \frac{1}{3}, \quad C_2 = \frac{1}{135}, \quad C_3 = \frac{1}{15750}, \quad C_4 = \frac{1}{3472875}.$$

Замечание 1. При вычислении интеграла по промежутку $[a, b]$ следует выполнить замену переменной $x = \frac{(b-a)}{2}t + \frac{(b+a)}{2}$, $dx = \frac{(b-a)}{2} dt$, так что

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right) dt \approx \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^n A_k f\left(\frac{b-a}{2}t_k + \frac{b+a}{2}\right).$$

Здесь t_k, A_k — соответственно узлы и коэффициенты формулы Гаусса для $[-1, 1]$. Для погрешности формулы Гаусса на промежутке $[a, b]$ имеем оценку

$$|R_n(f)| \leq \frac{(b-a)}{2} \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} \left(\frac{(b-a)}{2}\right)^{2n} M_{2n} = C_n^{[a,b]} M_{2n}, \quad (6)$$

$$\text{где } C_n^{[a,b]} = C_n \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1}, \quad M_{2n} = \max |f^{(2n)}(\xi)|, \xi \in [a, b].$$

Замечание 2. Для составной формулы Гаусса с m разбиениями погрешность

$$|R_n(f)| \leq C_n^{[0,1]} (b-a) \left(\frac{b-a}{m}\right)^{2n} M_{2n}, \quad (7)$$

то есть при уменьшении длины частичного промежутка вдвое погрешность уменьшается в 2^{2n} раз.

7.3.2. Формула Мелера

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad [a, b] = [-1, 1].$$

Узлы — корни многочлена Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right). \quad (8)$$

7.4. Варианты заданий

Вариант 1

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \cos(x) \sqrt{x} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
- 2) По формуле Симпсона с тремя узлами .
- 3) Построить интерполяционную формулу с весом \sqrt{x} по узлам $x_1=0, x_2=1/2, x_3=1$ и вычислить интеграл по этой формуле.
- 4) По формуле Гаусса с двумя узлами.
- 5) Построить формулу типа Гаусса с двумя узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 2

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
- 2) По формуле средних прямоугольников с двумя узлами.
- 3) Построить интерполяционную формулу с весом $1/\sqrt{x}$ по узлам $x_1 = 1/4, x_2 = 3/4$ и вычислить интеграл по этой формуле.

4) По формуле Гаусса с двумя узлами.

5) Построить формулу типа Гаусса с двумя узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 3

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \cos(x) \sqrt[4]{x} dx$$

следующими способами:

1) “Точно”.

2) По формуле средних прямоугольников с двумя узлами.

3) Построить интерполяционную формулу с весом $\sqrt[4]{x}$ по узлам $x_1=1/4$, $x_2=3/4$ и вычислить интеграл по этой формуле.

4) По формуле Гаусса с тремя узлами.

5) Построить формулу типа Гаусса с тремя узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 4

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt[3]{x}} dx$$

следующими способами:

1) “Точно”.

2) По формуле средних прямоугольников с тремя узлами.

3) Построить интерполяционную формулу с весом $1/\sqrt[3]{x}$ по узлам $x_1=1/6$, $x_2=1/2$, $x_3=5/6$ и вычислить интеграл по этой формуле.

4) По формуле Гаусса с двумя узлами.

5) Построить формулу типа Гаусса с двумя узлами и вычислить по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 5

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{x}} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
- 2) По формуле средних прямоугольников с двумя узлами.
- 3) Построить интерполяционную формулу с весом $1/\sqrt[3]{x}$ по узлам $x_1=1/4$, $x_2=3/4$ и вычислить интеграл по этой формуле.
- 4) По формуле Гаусса с тремя узлами.
- 5) Построить формулу типа Гаусса с тремя узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 6

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt[4]{1-x}} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
- 2) По формуле средних прямоугольников с тремя узлами.
- 3) Построить интерполяционную формулу с весом $1/\sqrt[4]{1-x}$ по узлам $x_1=1/6$, $x_2=1/2$, $x_3=5/6$ и вычислить интеграл по этой формуле.
- 4) По формуле Гаусса с двумя узлами.
- 5) Построить формулу типа Гаусса с двумя узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 7

Требуется вычислить

$$\int_0^1 e^x \sqrt{1-x} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
- 2) По формуле Симпсона с тремя узлами.
- 3) Построить интерполяционную формулу с весом $\sqrt{1-x}$ по узлам $x_1=0$, $x_2=1/2$, $x_3=1$ и вычислить по этой формуле.
- 4) По формуле Гаусса с двумя узлами.
- 5) Построить формулу типа Гаусса с двумя узлами и вычислить по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 8

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-x}} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
- 2) По формуле средних прямоугольников с тремя узлами.
- 3) Построить интерполяционную формулу с весом $1/\sqrt{1-x}$ по узлам $x_1=1/6$, $x_2=1/2$, $x_3=5/6$ и вычислить интеграл по этой формуле.
- 4) По формуле Гаусса с двумя узлами.
- 5) Построить формулу типа Гаусса с двумя узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 9

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \cos(x) \sqrt[3]{1-x} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
- 2) По формуле Симпсона с тремя узлами.
- 3) Построить интерполяционную формулу с весом $\sqrt[3]{1-x}$ по узлам $x_1=0$, $x_2=1/2$, $x_3=1$ и вычислить интеграл по этой формуле.
- 4) По формуле Гаусса с двумя узлами.

- 5) Построить формулу типа Гаусса с двумя узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 10

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \sin(x) \sqrt[4]{(1-x)^3} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
- 2) По формуле средних прямоугольников с двумя узлами.
- 3) Построить интерполяционную формулу с весом $\sqrt[4]{(1-x)^3}$ по узлам $x_1=1/4$, $x_2=3/4$ и вычислить интеграл по этой формуле.
- 4) По формуле Гаусса с двумя узлами.
- 5) Построить формулу типа Гаусса с двумя узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 11

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \frac{\cos(2x)}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
- 2) По формуле средних прямоугольников с тремя узлами.
- 3) Построить интерполяционную формулу с весом $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ по узлам $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{5}{6}$ и вычислить интеграл по этой формуле.
- 4) По формуле Гаусса с двумя узлами.
- 5) Построить формулу типа Гаусса с двумя узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 12

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \cos(x)\sqrt{1-x} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
- 2) По формуле Симпсона с тремя узлами.
- 3) Построить интерполяционную формулу с весом $\sqrt{1-x}$ по узлам $x_1=0$, $x_2=1/2$, $x_3=1$ и вычислить интеграл по этой формуле.
- 4) По формуле Гаусса с двумя узлами.
- 5) Построить формулу типа Гаусса с двумя узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 13

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \cos(x)\sqrt[4]{x} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
- 2) По формуле средних прямоугольников с двумя узлами.
- 3) Построить интерполяционную формулу с весом $\sqrt[4]{x}$ по узлам $x_1=1/4$, $x_2=3/4$ и вычислить интеграл по этой формуле.
- 4) По формуле Гаусса с двумя узлами.
- 5) Построить формулу типа Гаусса с двумя узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

8. Численное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

8.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0. \quad (1)$$

Будем считать, что эта задача имеет единственное решение на промежутке $[x_0, b]$. Запишем (1) в интегральном виде

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (2)$$

Методы численного решения этого уравнения заключаются в приближенном вычислении значений гипотетического решения $y(x)$ в точках $x_1, x_2, \dots, x_N \in [x_0, b]$. Для простоты мы далее будем считать точки (узлы) x_1, \dots, x_N равноотстоящими, т. е. $x_k = x_0 + kh$, где $h = (b - x_0)/N$.

Во всех рассмотренных методах решения задачи (1) значения в узлах будут строиться последовательно, т. е. будем считать, что значения $y_1 \approx y(x_1), \dots, y_m \approx y(x_m)$ уже известны, построим $y_{m+1} \approx y(x_{m+1})$.

8.2. Метод Эйлера и улучшенный метод Эйлера

Наиболее простой способ получить численное решение уравнения (2) — вычислить интеграл в правой части при помощи какой-либо квадратурной формулы. При этом для вычисления y_{m+1} можно использовать только значение y_m . Отметим, что такие методы решения дифференциального уравнения дают такую же погрешность, как и соответствующие квадратурные формулы.

8.2.1. Метод Эйлера

Применим формулу левых прямоугольников

$$y_{m+1} = y_m + \int_{x_m}^{x_m+h} f(t, y(t)) dt = y_m + hf(x_m, y_m) + O(h^2),$$

т. е. расчетная формула метода Эйлера

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m), \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3)$$

на одном шаге имеет погрешность $O(h^2)$ (в предположении, что все используемые данные точны). На промежутке $[x_0, b]$ погрешность метода не лучше, чем $O(h)$, но фактически погрешность может быть существенно хуже из-за нелинейного возрастания ошибки при интегрировании.

8.2.2. Улучшенный метод Эйлера

Применим для вычисления интеграла в правой части (2) формулу средних прямоугольников. Для этого введем дополнительную точку посередине между x_m и x_{m+1} . Обозначим её $x_{m+\frac{1}{2}} = x_m + \frac{h}{2}$. В ней вычислим значение решения уравнения по обычному методу Эйлера, т. е. при помощи формулы левых прямоугольников

$$y_{m+\frac{1}{2}} = y_m + \frac{h}{2} f(x_m, y_m).$$

Теперь значение в точке x_{m+1} вычислим по формуле средних прямоугольников

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + \int_{x_m}^{x_m+h} f(t, y(t)) dt \approx y_m + hf\left(x_{m+\frac{1}{2}}, y_{m+\frac{1}{2}}\right) = \\ &= y_m + hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2} f(x_m, y_m)\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Обычный метод Эйлера можно уточнить и другим способом. Предположим, что значение y_{m+1} вычислено по формуле левых прямоугольников, т. е. как в формуле (3), далее вычислим соответствующий интеграл по формуле трапеций. Итак, пусть

$$\tilde{y}_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m).$$

Тогда

$$y_{m+1} = y_m + \int_{x_m}^{x_m+h} f(t, y(t)) dt \approx y_m + \frac{h}{2} (f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, \tilde{y}_{m+1})) \quad (5)$$

В заключение отметим, что оба предложенных изменения метода Эйлера дают погрешность не лучше, чем $O(h^2)$, но фактически погрешность может быть существенно хуже из-за нелинейного возрастания ошибки при интегрировании, так же как и в п. 8.2.1.

8.3. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка

Расчетные формулы метода

$$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_m, y_m), \\ k_2 &= hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= hf(x_m + h, y_m + k_3), \quad m = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (7)$$

Оказывается, если $y_m = y(x_m)$ (равенство точное), то $y_{m+1} - y(x_{m+1}) = O(h^5)$. На всей интегральной кривой метод дает погрешность не лучше, чем $O(h^4)$ по причинам, указанным в п. 8.2.1.

Если уравнение имеет вид $y' = f(x)$, то $k_2 = k_3$ и видно, что расчетная формула метода Рунге-Кутты получается в результате применения формулы Симпсона, иначе — обобщенной формулы Симпсона.

Замечание 1. Все рассмотренные выше методы одношаговые, то есть для получения решения в следующей точке используется решение лишь в одной предыдущей точке. В одношаговых методах шаг может быть переменным.

8.4. Правило Рунге (двойного пересчета) практической оценки погрешности. Экстраполяция по Ричардсону

Предположим, что метод вычисления значений решения задачи (1) фиксирован и имеет порядок точности s . Это означает, что $y(x_i) - y_i = O(h^s)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Обозначения используются те же, что и в 8.1. Вычислим значение в точке x_m с шагом h и $h/2$. Полученные значения обозначим через $y_m^{(h)}$ и $y_m^{(h/2)}$ соответственно. Тогда главный член погрешности находится по формуле

$$R_m^{(h)} = \frac{y_m^{(h/2)} - y_m^{(h)}}{2^s - 1}.$$

Для достаточно малых h можно утверждать, что, если $|R_m^{(h)}| < \varepsilon$, то $|y(x_m) - y_m^{(h/2)}| < \varepsilon$.

Экстраполяция по Ричардсону заключается в уточнении значения в точке x_m по формуле

$$\hat{y}_m = y_m^{(h/2)} + R_m^{(h)}. \quad (8)$$

Заметим, что в результате уточнения по формуле (8) строится метод с более высоким порядком погрешности, чем исходный.

8.5. Методы Адамса

Ранее мы отмечали, что узлы x_1, \dots, x_N мы считаем равноотстоящими для удобства. И во всех рассмотренных выше методах это действительно не более чем удобство, поскольку все эти методы являлись одношаговыми, т.е. значение y_{m+1} строилось исключительно по y_m . В частности, все рассмотренные методы допускают переменный шаг аргумента ($x_{m+1} - x_m = h_m$). Теперь мы зафиксируем шаг $h = (b - x_0)/N$ и все узлы $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \dots, N$ будем считать равноотстоящими. При построении y_{m+1} будут использоваться значения решения в $k + 1$ предыдущих узлах y_{m-k}, \dots, y_m .

Предположим, что известны приближенные значения $y(x)$ в точках x_0, x_1, \dots, x_m , $y_i \approx y(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, m$, $k \leq m < N$ (они могут быть найдены одним из рассмотренных выше методов), в дальнейшем $m \geq k$.

8.5.1. Экстраполяционный метод Адамса

Начинаем мы, как обычно, с формулы (2)

$$y_{m+1} = y_m + \int_{x_m}^{x_m+h} f(x, y(x)) dx.$$

Подынтегральную функцию $f(x, y(x))$ заменим на интерполяционный многочлен, построенный по узлам x_{m-k}, \dots, x_m . Поскольку приближенное решение y_{m+1} находится в точке, лежащей вне промежутка, на котором лежат все узлы интерполирования, метод и получил название экстраполяционного. В зависимости от формы многочлена, получаются разные формулы метода.

Сначала предположим, что функцию $f(x, y(x))$ заменили на многочлен в форме Ньютона для конца таблицы. Напомним, что значения y_{m-k}, \dots, y_m мы считаем известными. Положим $q_j = h f(x_j, y_j)$. Многочлен имеет вид

$$P_k(x_m + th) = q_m + t\Delta q_{m-1} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+j-1)}{j!} \Delta^j q_{m-j} + \dots,$$

где конечные разности вычисляются по правилу

$$\Delta^j q_s = \Delta^{j-1} q_{s+1} - \Delta^{j-1} q_s.$$

Тогда

$$\int_{x_m}^{x_m+h} f(x, y(x)) dx \approx \int_0^1 \sum_{j=0}^k \frac{t(t+1) \cdots (t+j-1)}{j!} \Delta^j q_{m-j} dt.$$

Для упрощения формулы удобно ввести обозначение

$$a_j = \frac{1}{j!} \int_0^1 t(t+1) \cdots (t+j-1) dt. \quad (9)$$

Тогда получаем расчетную формулу

$$y_{m+1} = y_m + \sum_{j=0}^k a_j \Delta^j q_{m-j}. \quad (10)$$

Формулу (10) можно применять, начиная с $m = k$ для $m = k, k+1, \dots, N-1$.

Если решение $y(x)$ — многочлен степени не выше $k+1$, то экстраполяционный метод Адамса дает точное значение решения (в предположении, что все вычисления осуществляются точно).

На шаге погрешность метода $O(h^{k+2})$, на всем промежутке — не лучше $O(h^{k+1})$ (см. п. 8.2.1).

При $k = 4$ получаем формулу

$$y_{m+1} = y_m + q_m + \frac{1}{2} \Delta q_{m-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{m-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{m-3} + \frac{251}{720} \Delta^4 q_{m-4}. \quad (11)$$

Для вычислений рекомендуется использовать таблицу, фрагмент которой представлен таблицей 1.

Таблица 1

x	y	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$	$\Delta^4 q$
x_0	y_0	q_0				
			Δq_0			
x_1	y_1	q_1		$\Delta^2 q_0$		
			Δq_1		$\Delta^3 q_0$	
x_2	y_2	q_2		$\Delta^2 q_1$		$\Delta^4 q_0$
			Δq_2		$\Delta^3 q_1$	
x_3	y_3	q_3		$\Delta^2 q_2$		$\Delta^4 q_1$
			Δq_3		$\Delta^3 q_2$	
x_4	y_4	q_4		$\Delta^2 q_3$		
			Δq_4			
x_5	y_5	q_5				
x_6	y_6					

Начало таблицы — часть таблицы, значения в ячейках которой должны быть известны для применения экстраполяционного метода Адамса. Значения решения в точках начала таблицы следует вычислять соответствующим по порядку методом.

Преимущества метода Адамса по сравнению с методом Рунге-Кутты

- экономичность;
- наглядный контроль — по последним конечным разностям можно судить о точности результата.

Недостатком метода Адамса по сравнению с методом Рунге-Кутты является его многошаговость, то есть то, что решение в следующей точке зависит от решения в нескольких предыдущих точках, и они должны быть равноотстоящими.

Используя интерполяционный многочлен в форме Лагранжа или заменяя конечные разности в (11) выражениями через значения функции, можно получить безразностную формулу экстраполяционного метода Адамса

$$y_{m+1} \approx y_m + \sum_{j=0}^k b_{kj} q_{m-j}, \quad (12)$$

$$b_{kj} = \frac{(-1)^j}{j!(k-j)!} \int_0^1 \frac{t(t+1)\cdots(t+k)}{t+j} dt, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k. \quad (13)$$

Числа b_{kj} не зависят от m и от h , но зависят от порядка метода.

Расчетные формулы безразностного экстраполяционного метода Адамса различных порядков приведены ниже в таблице 2.

Заметим, что алгоритм вычисления решения по безразностной формуле реализуется проще, чем по разностной формуле, но наглядный контроль здесь отсутствует.

Таблица 2

k	Экстраполяционный метод Адамса
0	$y_{m+1} = y_m + q_m$
1	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{2}(3q_m - q_{m-1})$
2	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{12}(23q_m - 16q_{m-1} + 5q_{m-2})$
3	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{24}(55q_m - 59q_{m-1} + 37q_{m-2} - 9q_{m-3})$
4	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{720}(1901q_m - 2774q_{m-1} + 2616q_{m-2} - 1274q_{m-3} + 251q_{m-4})$

8.5.2. Интерполяционный метод Адамса

Пусть $h = (b - x_0)/N$ и $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \dots, N$.

Предположим, что известны приближенные значения $y(x)$ в точках x_0, x_1, \dots, x_m , $y(x_i) \approx y_i$, $i = 0, 1, \dots, m$, $k \leq m < N$. Обозначим $q_i = hf(x_i, y_i)$.

Заменяя приближенно функцию $f(x, y(x))$ в выражении

$$y_{m+1} = y_m + \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, y(x)) dx$$

интерполяционным многочленом k -ой степени в форме Ньютона для конца таблицы по узлам $x_{m+1}, x_m, \dots, x_{m+1-k}$ и интегрируя, получим расчетную формулу метода

$$y_{m+1} = y_m + \sum_{j=0}^k a_j^* \Delta^j q_{m+1-j}, \quad (14)$$

где

$$a_j^* = \frac{1}{j!} \int_{-1}^0 t(t+1) \cdots (t+j-1) dt. \quad (15)$$

Как видно, в правой части формулы (14) присутствует $q_{m+1} = hf(x_{m+1}, y_{m+1})$, т. е. формула (14) является уравнением относительно y_{m+1} . Интерполяционный метод Адамса является неявным методом. Уравнение (14) рекомендуется решать методом итераций.

В качестве нулевого приближения можно взять y_{m+1} , найденное экстраполяционным методом, обозначим его $y_{m+1}^{(0)}$. Вычислим

$$q_{m+1}^{(0)} = hf(x_{m+1}, y_{m+1}^{(0)}), \quad \Delta q_m^{(0)} = q_{m+1}^{(0)} - q_m^{(0)}, \quad \Delta^2 q_{m-1}^{(0)}, \dots, \Delta^k q_{m+1-k}^{(0)}.$$

Используя эти значения, вычисляем, $y_{m+1}^{(1)}$ по расчетной формуле (14). Сравниваем $|y_{m+1}^{(1)} - y_{m+1}^{(0)}| < \varepsilon$, где ε — заданная точность¹. Если условие не выполняется, то делаем перерасчет до тех пор, пока не будет выполнено условие.

Формулу (14) можно применять для $m = k, k+1, \dots, N-1$.

Если решение $y(x)$ — многочлен степени не выше $k+1$, то интерполяционный метод Адамса дает точное значение решения.

На шаге погрешность метода $O(h^{k+2})$, на всем промежутке — не лучше $O(h^{k+1})$ (см. п. 8.2.1).

При $k = 4$ получаем формулу

$$y_{m+1} = y_m + q_{m+1} - \frac{1}{2} \Delta q_m - \frac{1}{12} \Delta^2 q_{m-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 q_{m-2} - \frac{19}{720} \Delta^4 q_{m-3}. \quad (16)$$

Используя интерполяционный многочлен в форме Лагранжа, или заменяя конечные разности в (16) выражениями через значения функции, можно получить безразностную формулу интерполяционного метода Адамса

$$y_{m+1} = y_m + \sum_{j=-1}^{k-1} b_{kj}^* q_{m-j}, \quad (17)$$

$$b_{kj}^* = \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!(k-1-j)!} \int_0^1 \frac{(t-1)t(t+1)\dots(t+k-1)}{t+j} dt, \quad j = -1, 0, 1, 2, \dots, k-1. \quad (18)$$

Числа b_{kj}^* не зависят от m и от h .

¹Заметим, что все решения в предыдущих точках должны быть вычислены с этой точностью.

Приведем расчетные формулы безразностного интерполяционного метода Адамса при $k = 0, 1, 2, 3, 4$ в таблице 3.

Таблица 3

k	Интерполяционный метод Адамса
0	$y_{m+1} = y_m + q_{m+1}$
1	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{2}(q_{m+1} + q_m)$
2	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{12}(5q_{m+1} + 8q_m - q_{m-1})$
3	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{24}(9q_{m+1} + 19q_m - 5q_{m-1} + q_{m-2})$
4	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{720}(251q_{m+1} + 646q_m - 264q_{m-1} + 106q_{m-2} - 19q_{m-3})$

8.6. Варианты заданий

Указания

- 1) После знака “—” приведены обозначения для полученного решения.
- 2) Протестировать полученные результаты на уравнениях вида $y' = P_{s-1}(x)$, где $P_{s-1}(x)$ — полином степени $s - 1$, s — порядок метода.

Вариант 1

$$y' = \cos(1.75x + y) + 1.25(x - y), \quad y(0) = 0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом $h = 0.1$ на $[0, 1]$, используя функции математического пакета — y_math .
- 2) Методом Эйлера получить таблицу решения на $[0, 0.5]$
 - a) с шагом $h = y^h$;
 - b) с шагом $h/2 = y^{h/2}$;
 - c) уточнить решение по Ричардсону — y_rev .
- 3) Напечатать таблицу значений $y_math, y^h, y^{h/2}, y_rev, y_rev - y_math$ в точках с шагом h .
- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью $\varepsilon = 0.00001$ на $[0, 1]$ — y_RK .
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 5-ого порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке $[5h, 1]$ — y_Ad_ex . Начало таблицы строить методом Рунге-Кутты.
- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 5-ого порядка с шагом h на промежутке $[5h, 1]$ — y_Ad_in .

- 8) Напечатать таблицу значений решения y_{math} и погрешностей $y_{math} - y_{RK}$, $y_{math} - y_{Ad_ex}$, $y_{math} - y_{Ad_in}$.

Вариант 2

$$y' = \cos(2x + y) + 1.5(x - y), \quad y(0) = 0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом $h = 0.05$ на $[0, 0.5]$, используя функции математического пакета — y_{math} .
- 2) Методом Эйлера улучшенным (исп. формула ср. прям.) получить таблицу решения на $[0, 0.5]$
 - а) с шагом $h - y^h$;
 - б) с шагом $h/2 - y^{h/2}$;
 - в) уточнить решение по Рундсону — y_{rev} .
- 3) Напечатать таблицу значений y_{math} , y^h , $y^{h/2}$, y_{rev} , $y_{rev} - y_{math}$ в точках с шагом h .
- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью $\varepsilon=0.000001$ на $[0, 0.5]$ — y_{RK} .
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 4-ого порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке $[4h, 0.5]$ — y_{Ad_ex} . Начало таблицы строить методом Рунге-Кутты.
- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 4-ого порядка с шагом h на промежутке $[4h, 0.5]$ — y_{Ad_in} .
- 8) Напечатать таблицу значений решения y_{math} и погрешностей $y_{math} - y_{RK}$, $y_{math} - y_{Ad_ex}$, $y_{math} - y_{Ad_in}$.

Вариант 3

$$y' = 1 - \sin(1.25x + y) - \frac{0.1y}{2+x}, \quad y(0) = 0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом $h = 0.05$ на $[0, 0.5]$, используя функции математического пакета — y_{math} .
- 2) Методом Эйлера получить таблицу решения на $[0, 0.5]$
 - а) с шагом $h - y^h$;
 - б) с шагом $h/2 - y^{h/2}$;
 - в) уточнить решение по Рундсону — y_{rev} .

- 3) Напечатать таблицу значений $y_{math}, y^h, y^{h/2}, y_{rev}, y_{rev} - y_{math}$ в точках с шагом h .
- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью $\varepsilon=0.00001$ на $[0, 1] - y_{RK}$.
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 4-ого порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке $[4h, 1] - y_{Ad_{ex}}$. Начало таблицы строить методом разложения в ряд.
- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 4-ого порядка с шагом h на промежутке $[4h, 1] - y_{Ad_{in}}$.
- 8) Напечатать таблицу значений решения y_{math} и погрешностей $y_{math} - y_{RK}, y_{math} - y_{Ad_{ex}}, y_{math} - y_{Ad_{in}}$.

Вариант 4

$$y' = \frac{\cos(y)}{1+x} - 0.5y, \quad y(0) = 0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом $h = 0.05$ на $[0, 0.5]$, используя функции математического пакета — y_{math} .
- 2) Методом Эйлера улучшенным (исп. формула ср. прям.) получить таблицу решения на $[0, 0.5]$
 - а) с шагом $h - y^h$;
 - б) с шагом $h/2 - y^{h/2}$;
 - в) уточнить решение по Ричардсону — y_{rev} .
- 3) Напечатать таблицу значений $y_{math}, y^h, y^{h/2}, y_{rev}, y_{rev} - y_{math}$ в точках с шагом h .
- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью $\varepsilon=0.000001$ на $[0, 0.5] - y_{RK}$.
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 4-ого порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке $[4h, 0.5] - y_{Ad_{ex}}$. Начало таблицы строить методом разложения в ряд.
- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 4-ого порядка с шагом h на промежутке $[4h, 0.5] - y_{Ad_{in}}$.
- 8) Напечатать таблицу значений решения y_{math} и погрешностей $y_{math} - y_{RK}, y_{math} - y_{Ad_{ex}}, y_{math} - y_{Ad_{in}}$.

Вариант 5

$$y' = 1 - \sin(1.25x + y) - \frac{0.1y}{2+x}, \quad y(0) = 0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом $h = 0.1$ на $[0, 0.5]$, используя функции математического пакета — y_math .
- 2) Методом Эйлера улучшенным (исп. формула трап.) получить таблицу решения на $[0, 0.5]$
 - а) с шагом $h - y^h$;
 - б) с шагом $h/2 - y^{h/2}$;
 - в) уточнить решение по Рундсону — y_rev .
- 3) Напечатать таблицу значений $y_math, y^h, y^{h/2}, y_rev, y_rev - y_math$ в точках с шагом h .
- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью $\varepsilon=0.00001$ на $[0, 0.5]$ — y_RK .
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 4-ого порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке $[4h, 0.5]$ — y_Ad_ex . Начало таблицы строить методом разложения в ряд.
- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 4-ого порядка с шагом h на промежутке $[4h, 0.5]$ — y_Ad_in .
- 8) Напечатать таблицу значений решения y_math и погрешностей $y_math - y_RK, y_math - y_Ad_ex, y_math - y_Ad_in$.

Вариант 6

$$y' = 1 + (0.5 - x) \sin(y) - (1 + x)y, \quad y(0) = 0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом $h = 0.1$ на $[0, 1]$, используя функции математического пакета — y_math
- 2) Методом Эйлера получить таблицу решения на $[0, 0.5]$
 - а) с шагом $h - y^h$;
 - б) с шагом $h/2 - y^{h/2}$;
 - в) уточнить решение по Рундсону — y_rev .
- 3) Напечатать таблицу значений $y_math, y^h, y^{h/2}, y_rev, y_rev - y_math$ в точках с шагом h .

- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью $\varepsilon=0.00001$ на $[0, 1] - y_{RK}$.
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 5-ого порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке $[5h, 1] - y_{Ad_{ex}}$. Начало таблицы строить методом Рунге-Кутты.
- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 5-ого порядка с шагом h на промежутке $[5h, 1] - y_{Ad_{in}}$.
- 8) Напечатать таблицу значений решения y_{math} и погрешностей $y_{math} - y_{RK}$, $y_{math} - y_{Ad_{ex}}$, $y_{math} - y_{Ad_{in}}$.

Вариант 7

$$y' = 1 + (0.75 - x) \sin(y) - (1.25 + x)y, \quad y(0) = 0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом $h = 0.05$ на $[0, 0.5]$, используя функции математического пакета — y_{math} .
- 2) Методом Эйлера улучшенным (исп. формула ср. прям.) получить таблицу решения на $[0, 0.5]$
 - a) с шагом $h - y^h$;
 - b) с шагом $h/2 - y^{h/2}$;
 - c) уточнить решение по Ричардсону — y_{rev} .
- 3) Напечатать таблицу значений $y_{math}, y^h, y^{h/2}, y_{rev}, y_{rev} - y_{math}$ в точках с шагом h .
- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью $\varepsilon=0.00001$ на $[0, 0.5] - y_{RK}$.
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 4-ого порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке $[4h, 0.5] - y_{Ad_{ex}}$. Начало таблицы строить методом Рунге-Кутты.
- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 4-ого порядка с шагом h на промежутке $[4h, 0.5] - y_{Ad_{in}}$.
- 8) Напечатать таблицу значений решения y_{math} и погрешностей $y_{math} - y_{RK}$, $y_{math} - y_{Ad_{ex}}$, $y_{math} - y_{Ad_{in}}$.

Вариант 8

$$y' = 1 + (1 - x) \sin(y) - (1.5 + x) y, \quad y(0) = 0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом $h = 0.05$ на $[0, 0.5]$, используя функции математического пакета — y_math .
- 2) Методом Эйлера улучшенным (исп. формула трап.) получить таблицу решения на $[0, 0.5]$
 - а) с шагом $h = y^h$;
 - б) с шагом $h/2 = y^{h/2}$;
 - в) уточнить решение по Ричардсону — y_rev .
- 3) Напечатать таблицу значений $y_math, y^h, y^{h/2}, y_rev, y_rev - y_math$ в точках с шагом h .
- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью $\varepsilon = 0.00001$ на $[0, 0.5]$ — y_RK .
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 3-его порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке $[3h, 0.5]$ — y_Ad_ex . Начало таблицы строить методом разложения в ряд.
- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 3-его порядка с шагом h на промежутке $[3h, 0.5]$ — y_Ad_in .
- 8) Напечатать таблицу значений решения y_math и погрешностей $y_math - y_RK, y_math - y_Ad_ex, y_math - y_Ad_in$.

Вариант 9

$$y' = 1 + (1.25 - x) \sin(y) - (1.75 + x) y, \quad y(0) = 0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом $h = 0.1$ на $[0, 1]$, используя функции математического пакета — y_math
- 2) Методом Эйлера получить таблицу решения на $[0, 0.5]$
 - а) с шагом $h = y^h$;
 - б) с шагом $h/2 = y^{h/2}$;
 - в) уточнить решение по Ричардсону — y_rev .
- 3) Напечатать таблицу значений $y_math, y^h, y^{h/2}, y_rev, y_rev - y_math$ в точках с шагом h .
- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.

- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью $\varepsilon=0.00001$ на $[0, 1]$ — y_{RK} .
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 5-ого порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке $[5h, 1]$ — $y_{Ad_{ex}}$. Начало таблицы строить методом Рунге-Кутты.
- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 5-ого порядка с шагом h на промежутке $[5h, 1]$ — $y_{Ad_{in}}$.
- 8) Напечатать таблицу значений решения y_{math} и погрешностей $y_{math} - y_{RK}$, $y_{math} - y_{Ad_{ex}}$, $y_{math} - y_{Ad_{in}}$.

Вариант 10

$$y' = 1 + (1.5 - x) \sin(y) - (2 + x)y, \quad y(0) = 0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом $h = 0.05$ на $[0, 0.5]$, используя функции математического пакета — y_{math} .
- 2) Методом Эйлера улучшенным (исп. формула ср. прям.) получить таблицу решения на $[0, 0.5]$
 - a) с шагом h — y^h ;
 - b) с шагом $h/2$ — $y^{h/2}$;
 - c) уточнить решение по Ричардсону — y_{rev} .
- 3) Напечатать таблицу значений $y_{math}, y^h, y^{h/2}, y_{rev}, y_{rev} - y_{math}$ в точках с шагом h .
- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью $\varepsilon=0.000001$ на $[0, 0.5]$ — y_{RK} .
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 3-его порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке $[3h, 0.5]$ — $y_{Ad_{ex}}$. Начало таблицы строить методом разложения в ряд.
- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 4-ого порядка с шагом h на промежутке $[3h, 0.5]$ — $y_{Ad_{in}}$.
- 8) Напечатать таблицу значений решения y_{math} и погрешностей $y_{math} - y_{RK}$, $y_{math} - y_{Ad_{ex}}$, $y_{math} - y_{Ad_{in}}$.

Вариант 11

$$y' = (0.6 - y^2) \cos(x) + 0.2y, \quad y(0) = 0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом $h = 0.1$ на $[0, 1]$, используя функции математического пакета — y_math
- 2) Методом Эйлера получить таблицу решения на $[0, 0.5]$
 - а) с шагом $h = y^h$;
 - б) с шагом $h/2 = y^{h/2}$;
 - в) уточнить решение по Ричардсону — y_rev .
- 3) Напечатать таблицу значений $y_math, y^h, y^{h/2}, y_rev, y_rev - y_math$ в точках с шагом h .
- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью $\varepsilon=0.00001$ на $[0, 1]$ — y_RK .
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 5-ого порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке $[5h, 1]$ — y_Ad_ex . Начало таблицы строить методом Рунге-Кутты.
- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 5-ого порядка с шагом h на промежутке $[5h, 1]$ — y_Ad_in .
- 8) Напечатать таблицу значений решения y_math и погрешностей $y_math - y_RK, y_math - y_Ad_ex, y_math - y_Ad_in$.

Вариант 12

$$y' = (0.7 - y^2) \cos(x) + 0.3y, \quad y(0) = 0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом $h = 0.05$ на $[0, 0.5]$, используя функции математического пакета — y_math .
- 2) Методом Эйлера улучшенным (исп. формула ср. прям.) получить таблицу решения на $[0, 0.5]$
 - а) с шагом $h = y^h$;
 - б) с шагом $h/2 = y^{h/2}$;
 - в) уточнить решение по Ричардсону — y_rev .
- 3) Напечатать таблицу значений $y_math, y^h, y^{h/2}, y_rev, y_rev - y_math$ в точках с шагом h .
- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью $\varepsilon=0.00001$ на $[0, 0.5]$ — y_RK .
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 4-ого порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке $[4h, 0.5]$ — y_Ad_ex . Начало таблицы строить методом Рунге-Кутты.

- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 4-ого порядка с шагом h на промежутке $[4h, 0.5]$ — y_{Ad_in} .
- 8) Напечатать таблицу значений решения y_{math} и погрешностей $y_{math} - y_{RK}$, $y_{math} - y_{Ad_ex}$, $y_{math} - y_{Ad_in}$.

Вариант 13

$$y' = \cos(1.75x + y) + 1.25(x - y), \quad y(0) = 0.$$

Требуется

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом $h = 0.1$ на $[0, 1]$, используя функции математического пакета — y_{math}
- 2) Методом Эйлера получить таблицу решения на $[0, 0.5]$
 - а) с шагом $h = y^h$;
 - б) с шагом $h/2 = y^{h/2}$;
 - в) уточнить решение по Рундсону — y_{rev} .
- 3) Напечатать таблицу значений y_{math} , y^h , $y^{h/2}$, y_{rev} , $y_{rev} - y_{math}$ в точках с шагом h .
- 4) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 5) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с точностью $\varepsilon = 0.00001$ на $[0, 1]$ — y_{RK} .
- 6) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 5-ого порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке $[5h, 1]$ — y_{Ad_ex} . Начало таблицы строить методом Рунге-Кутты.
- 7) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 5-ого порядка с шагом h на промежутке $[5h, 1]$ — y_{Ad_in} .
- 8) Напечатать таблицу значений решения y_{math} и погрешностей $y_{math} - y_{RK}$, $y_{math} - y_{Ad_ex}$, $y_{math} - y_{Ad_in}$.

9. Вопросы устойчивости задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений и систем. Жесткие задачи

9.1. Жесткие уравнения

9.1.1. Постановка задачи. Устойчивые уравнения

Рассмотрим задачу

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (1)$$

Разложим правую часть $f(t, y)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $t = t_0$, ограничиваясь линейными членами. Получим

$$f(t, y) \approx f(t_0, y_0) + f'_t(t_0, y_0)(t - t_0) + f'_y(t_0, y_0)(y - y_0) = ay + g(t),$$

где $a = f'_y(t_0, y_0)$, $g(t) = f(t_0, y_0) + f'_t(t_0, y_0)(t - t_0) - f'_y(t_0, y_0)y_0$.

Решение задачи $y' = g(t)$, $y(t_0) = 0$ может быть легко найдено, а решение задачи

$$y' = ay, \quad y(t_0) = y_0, \quad (2)$$

где $|a|$ — велико, представляет интерес с точки зрения вопросов устойчивости. В дальнейшем будем рассматривать модельную задачу (2).

Точное решение задачи (2) имеет вид

$$y(t) = y_0 e^{a(t-t_0)}.$$

Если реально решаем задачу с начальным условием

$$y(t_0) = y_0 + \Delta y_0,$$

то её решение имеет вид

$$\tilde{y}(t) = (y_0 + \Delta y_0) e^{a(t-t_0)}$$

и

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| = |\Delta y_0| e^{a(t-t_0)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty \text{ при } a > 0, \quad |y(t) - \tilde{y}(t)| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \text{ при } a < 0.$$

Следовательно, уравнение (2) будет устойчиво при $a < 0$, и далее будем рассматривать приближенные методы решения лишь таких уравнений. Заметим, что точное решение $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Задача (2) при $a < 0$, где $|a|$ — велико, называется жесткой.

Решение строится в виде таблицы значений с шагом h в точках $t_i = t_0 + i h$, $i = 0, 1, \dots$. Обозначим $y_i \approx y(t_i)$.

9.1.2. Метод Эйлера

Аппроксимируя производную в левой части уравнения (2) в точке t_i разностью “вперед”, получаем расчетную формулу метода

$$y_{i+1} = y_i + h a y_i = (1 + a h) y_i = R(a h) y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N - 1, \quad \text{где } R(a h) = 1 + a h.$$

Пример.

Рассмотрим задачу

$$y' = -11y, \quad y(0) = 1.$$

Приближенное решение, полученное методом Эйлера, имеет вид

$$y_{i+1} = y_i - 11hy_i = (1 - 11h)y_i, \quad R(ah) = 1 - 11h.$$

Пусть $h = 0.2$, тогда $R(ah) = -1.2$, $y_{i+1} = (-1.2)^i \rightarrow \infty$, что противоречит поведению точного решения.

Пусть $h = 0.1$, тогда $R(ah) = -0.1$, $y_{i+1} = (-0.1)^i \rightarrow 0$.

Очевидно, процесс будет устойчив, если $|R(ah)| < 1$.

Обозначим $H = -ah$. Тогда множество таких H , что $H \in (0, 2)$ образуют область абсолютной устойчивости метода Эйлера.

Таким образом, метод Эйлера условно устойчив при $h < -2/a$.

9.1.3. Обратный метод Эйлера

Расчетная формула метода получается из аппроксимации производной в левой части уравнения (2) в точке t_i разностью “назад” и имеет вид

$$y_{i+1} = \frac{y_i}{1 - ah} = R(ah) y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$$

Здесь $R(ah) = 1/(1 - ah) < 1$ при любых h так как $a < 0$. Следовательно, обратный метод Эйлера устойчив при любых h .

9.1.4. Метод средней точки

Аппроксимируя производную в левой части уравнения (2) в точке t_i симметричной разностью

$$\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = ay_i,$$

получаем разностное уравнение второго порядка

$$y_{i+1} - 2ahy_i - y_{i-1} = 0.$$

Для исследования метода на устойчивость подставляем в разностное уравнение частное решение $y_i = \mu^i$. В результате получаем характеристическое уравнение и для устойчивости метода требуется, чтобы все корни характеристического уравнения были по модулю меньше единицы.

Составляем характеристическое уравнение

$$\mu^2 - 2ah\mu - 1 = 0.$$

Его корни

$$\mu_{1,2} = ah \pm \sqrt{a^2h^2 + 1}.$$

Видно, что один из корней $|\mu_2| > 1$ при $a < 0$, что показывает неустойчивость процесса при любых значениях ah . Следовательно, множество абсолютной устойчивости в данном случае пусто.

9.1.5. Методы Адамса

Расчетные формулы экстраполяционного и интерполяционного методов Адамса $(k+1)$ -ого порядка соответственно имеют вид

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=0}^k b_{jk} q_{i-j}, \quad y_{i+1} = y_i + \sum_{j=-1}^{k-1} b_{jk}^* q_{i-j}, \quad i = k, k+1, \dots$$

Коэффициенты b_{kj} , b_{kj}^* — известны, а q_k в случае уравнения (2) имеет вид $q_k = hay_k$. Приведем расчетные формулы методов небольших порядков погрешности.

а) экстраполяционный метод Адамса первого порядка (явный метод Эйлера)

$$y_{i+1} = y_i + hay_i = (1 + ha)y_i, \quad i = 0, 1, \dots \quad (3)$$

б) интерполяционный метод Адамса первого порядка (неявный метод Эйлера)

$$y_{i+1} = y_i + hay_{i+1}, \quad y_{i+1} = \frac{y_i}{1 - ha}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (4)$$

в) экстраполяционный метод Адамса второго порядка

$$y_{i+1} = y_i + \frac{ha}{2}(3y_i - y_{i-1}) = \left(1 + \frac{3ha}{2}\right)y_i - \frac{ha}{2}y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5)$$

г) интерполяционный метод Адамса второго порядка

$$y_{i+1} = y_i + \frac{ha}{2}(y_{i+1} + y_i), \quad y_{i+1} = \frac{\left(1 + \frac{ha}{2}\right)}{\left(1 - \frac{ha}{2}\right)}y_i, \quad i = 0, 1, \dots \quad (6)$$

д) интерполяционный метод Адамса третьего порядка

$$y_{i+1} = y_i + \frac{ha}{12}(5y_{i+1} + 8y_i - y_{i-1}), \quad y_{i+1} = \frac{\left(1 + \frac{2ha}{3}\right)}{\left(1 - \frac{5ha}{12}\right)}y_i - \frac{\frac{ha}{12}}{\left(1 - \frac{5ha}{12}\right)}y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Расчетные формулы методов приводят к следующим разностным уравнениям и условиям устойчивости:

а) экстраполяционный метод Адамса первого порядка (явный метод Эйлера)

$$y_{i+1} - (1 + ha)y_i = 0, \quad \text{метод устойчив при } h < -\frac{2}{a}.$$

б) интерполяционный метод Адамса первого порядка (неявный метод Эйлера)

$$(1 - ha)y_{i+1} - y_i = 0, \quad \text{метод устойчив при любом } h.$$

в) экстраполяционный метод Адамса второго порядка

$$y_{i+1} - \left(1 + \frac{3ha}{2}\right)y_i + \frac{ha}{2}y_{i-1} = 0, \quad \text{метод устойчив при } h < -\frac{1}{a}.$$

г) интерполяционный метод Адамса второго порядка

$$\left(1 - \frac{ha}{2}\right)y_{i+1} - \left(1 + \frac{ha}{2}\right)y_i = 0, \quad \text{метод устойчив при любом } h.$$

д) интерполяционный метод Адамса третьего порядка

$$\left(1 - \frac{ha}{12}\right)y_{i+1} - \left(1 + \frac{8ha}{12}\right)y_i + \frac{ha}{12}y_{i-1} = 0, \quad \text{метод устойчив при } h < -\frac{6}{a}.$$

Для исследования метода на устойчивость, как и ранее, подставляем в разностное уравнение частное решение $y_i = \mu^i$. В результате получаем характеристическое уравнение и для устойчивости метода требуется, чтобы все корни характеристического уравнения были по модулю меньше единицы.

Заметим, что методы а), б), г) являются одношаговыми и приходится решать линейное уравнение, методы в) и д) — двухшаговые и характеристическое уравнение соответственно квадратичное.

9.2. Жесткие системы

9.2.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для системы n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$Y' = AY, \quad Y(t_0) = Y_0, \quad Y = Y(t), \quad Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы A и они различны, U_1, U_2, \dots, U_n — собственные векторы, так что $AU_i = \lambda_i U_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$.

Общее решение системы в данном случае имеет вид

$$Y(t) = C_1 U_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 U_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n U_n e^{\lambda_n t}, \quad (9)$$

где C_1, C_2, \dots, C_n — определяются из начального условия.

Определение. Если $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$ и $\max(-\operatorname{Re}(\lambda_i)) / \min(-\operatorname{Re}(\lambda_i))$ — велико, то система называется жесткой.

Для исследования исходной системы сделаем замену переменных

$$Y(t) = GZ(t), \quad G^{-1}AG = \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_n].$$

Тогда получим тестовую систему вида $z'_i = \lambda_i z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$.

Таким образом, условие $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$ аналогично условию $a < 0$ в случае уравнения и обеспечивает устойчивость системы.

Далее будем предполагать, что собственные числа матрицы A вещественны.

Расчетные формулы методов и разностные уравнения записываются аналогично случаю одного уравнения, но здесь вместо параметра a следует подставлять матрицу A или $\lambda_i(A)$ соответственно.

Для устойчивости процесса получения приближенного решения достаточно, чтобы все характеристические числа разностных уравнений, составленных для различных $\lambda_i(A)$, $i = 1, 2, \dots, n$, были по модулю меньше единицы.

Таким образом, в условии устойчивости также вместо параметра a следует подставлять $\min(\lambda_i(A))$.

Рассмотрим некоторые методы.

9.2.2. Метод Эйлера

Расчетная формула этого метода получается аналогично случаю решения уравнения и имеет вид

$$Y_{i+1} = (E + Ah)Y_i. \quad (10)$$

Обозначим $W = E + Ah$. В данном случае для устойчивости метода требуется, чтобы все собственные числа матрицы перехода W были по модулю меньше единицы.

$\lambda(W) = 1 + h\lambda(A)$ и для выполнения условия устойчивости h следует выбирать удовлетворяющим условию $h < 2/\max|\lambda_i(A)|$, $i = 1, 2, \dots, n$.

9.2.3. Обратный метод Эйлера

Расчетная формула имеет вид

$$Y_{i+1} = (E - Ah)^{-1}Y_i. \quad (11)$$

Обозначим $W = (E - Ah)^{-1}$, следовательно

$$\lambda_i(W) = \frac{1}{(1 - h\lambda_i(A))},$$

и $|\lambda_i(W)| < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, т. е. при любых h метод устойчив.

9.2.4. Методы Адамса

Расчетные формулы и условия устойчивости методов Адамса для систем выписываются аналогично расчетным формулам и условиям для уравнений в 9.1.5. Для примера выпишем расчетную формулу интерполяционного метода Адамса третьего порядка

$$Y_{i+1} = \left(E - \frac{5hA}{12}\right)^{-1} \left(E + \frac{2hA}{3}\right) Y_i - \left(E - \frac{5hA}{12}\right)^{-1} \left(\frac{hA}{12}\right) Y_{i-1}. \quad (12)$$

Обозначим

$$W_1 = \left(E - \frac{5hA}{12}\right)^{-1} \left(E + \frac{2hA}{3}\right), \quad W_2 = \left(E - \frac{5hA}{12}\right)^{-1} \left(\frac{hA}{12}\right),$$

тогда

$$\lambda_k(W_1) = \frac{1 + \frac{2h\lambda_k(A)}{3}}{1 - \frac{5h\lambda_k(A)}{12}}, \quad \lambda_k(W_2) = \frac{\frac{h\lambda_k(A)}{12}}{1 - \frac{5h\lambda_k(A)}{12}}.$$

Характеристические уравнения примут вид

$$(\mu^{(k)})^2 - \lambda_k(W_1)\mu^{(k)} + \lambda_k(W_2) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Напомним, что для устойчивости метода требуется, чтобы оба корня всех характеристических уравнений были по модулю меньше единицы, и для интерполяционного метода Адамса третьего порядка условие устойчивости принимает вид $h < 6/\max |\lambda_i(A)|$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Замечание 1. В двухшаговых методах недостающее решение при $t = h$ можно построить обратным методом Эйлера или интерполяционным методом Адамса второго порядка (они оба устойчивы при любом h) с достаточно малым шагом.

9.3. Задание

Для задачи Коши

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1$$

выполнить следующее:

- 1) Построить на промежутке $[0, 0.5]$ точное решение в точках $t_i = ih, i = 1, 2, \dots, 5$, $h = 0.1$.
- 2) Построить на промежутке $[0, 0.5]$ приближенное решение в тех же точках с шагом $h = 0.05$
 - а) явным методом Эйлера;
 - б) неявным методом Эйлера;
 - в) одним из методов Адамса, указанным в варианте задания.
- 3) Исследовать на устойчивость эти методы.
- 4) Повторить п.2 для $h = 0.001$.

Проанализировать результаты.

Результаты представить в двух таблицах вида

$$h =$$

Метод		Характерист. числа		t					
				0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Точное	y_1^*	$\lambda_1()$	$\lambda_2()$						
	y_2^*	—	—						
М. Эйлера	$y_1^* - y_1$								
	$y_2^* - y_2$								
Обр. м. Э.	$y_1^* - y_1$								
	$y_2^* - y_2$								
М. Адамса	$y_1^* - y_1$								
	$y_2^* - y_2$								

9.4. Варианты заданий

Вариант 1

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.05 y_2, \\ y_2' = 123.05 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

- 1) Явный метод Эйлера.
- 2) Неявный метод Эйлера.
- 3) Экстраполяционный метод Адамса второго порядка.

Вариант 2

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.1 y_2, \\ y_2' = 123.1 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

- 1) Явный метод Эйлера.
- 2) Неявный метод Эйлера.
- 3) Интерполяционный метод Адамса второго порядка.

Вариант 3

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.15 y_2, \\ y_2' = 123.15 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

- 1) Явный метод Эйлера.
- 2) Неявный метод Эйлера.
- 3) Интерполяционный метод Адамса третьего порядка.

Вариант 4

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.2 y_2, \\ y_2' = 123.2 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

- 1) Явный метод Эйлера.
- 2) Неявный метод Эйлера.
- 3) Интерполяционный метод Адамса второго порядка.

Вариант 5

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.25 y_2, \\ y_2' = 123.25 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

- 1) Явный метод Эйлера.
- 2) Неявный метод Эйлера.
- 3) Экстраполяционный метод Адамса второго порядка.

Вариант 6

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.3 y_2, \\ y_2' = 123.3 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

- 1) Явный метод Эйлера.
- 2) Неявный метод Эйлера.
- 3) Интерполяционный метод Адамса второго порядка.

Вариант 7

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.35 y_2, \\ y_2' = 123.35 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

- 1) Явный метод Эйлера.
- 2) Неявный метод Эйлера.
- 3) Усовершенствованный метод Эйлера.

Вариант 8

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.4 y_2, \\ y_2' = 123.4 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

- 1) Явный метод Эйлера.
- 2) Неявный метод Эйлера.
- 3) Экстраполяционный метод Адамса второго порядка.

Вариант 9

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.45 y_2, \\ y_2' = 123.45 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

- 1) Явный метод Эйлера.
- 2) Неявный метод Эйлера.
- 3) Интерполяционный метод Адамса третьего порядка.

Вариант 10

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.5 y_2, \\ y_2' = 123.5 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

- 1) Явный метод Эйлера.
- 2) Неявный метод Эйлера.
- 3) Интерполяционный метод Адамса второго порядка.

Вариант 11

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.55 y_2, \\ y_2' = 123.55 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

- 1) Явный метод Эйлера.
- 2) Неявный метод Эйлера.
- 3) Интерполяционный метод Адамса третьего порядка.

Вариант 12

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.6 y_2, \\ y_2' = 123.6 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

- 1) Явный метод Эйлера.
- 2) Неявный метод Эйлера.
- 3) Усовершенствованный метод Эйлера.

Вариант 13

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.65 y_2, \\ y_2' = 123.65 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

- 1) Явный метод Эйлера.
- 2) Неявный метод Эйлера.
- 3) Экстраполяционный метод Адамса второго порядка.

Вариант 14

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.7 y_2, \\ y_2' = 123.7 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

- 1) Явный метод Эйлера.
- 2) Неявный метод Эйлера.
- 3) Интерполяционный метод Адамса второго порядка.

Вариант 15

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.75 y_2, \\ y_2' = 123.75 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

- 1) Явный метод Эйлера.
- 2) Неявный метод Эйлера.
- 3) Экстраполяционный метод Адамса второго порядка.

Вариант 16

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.80 y_2, \\ y_2' = 123.80 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

- 1) Явный метод Эйлера.
- 2) Неявный метод Эйлера.
- 3) Интерполяционный метод Адамса третьего порядка.

10. Векторные и матричные нормы. Обусловленность задачи решения линейной алгебраической системы

10.1. Векторные нормы

Вектору $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)' \in C^n$ сопоставим вещественное число

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

Это число называется нормой Гельдера и удовлетворяет всем свойствам для нормы

$$\begin{aligned} \|x\|_p &\geq 0, \quad \|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \\ \|\alpha x\|_p &= |\alpha| \|x\|_p, \quad \alpha \in C. \\ \|x + y\|_p &\leq \|x\|_p + \|y\|_p. \end{aligned}$$

На практике используются следующие частные случаи нормы Гельдера:

$$\begin{aligned} p = 1: \quad \|x\|_1 &= \sum_{j=1}^n |x_j|. \\ p = 2: \quad \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}. \\ p = \infty: \quad \|x\|_\infty &= \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|. \end{aligned}$$

Упражнение 1. $\|(1, -5, 3)\| = ?$

10.2. Матричные нормы

Обозначим через $M_n(C)$ множество квадратных матриц порядка n , элементами которых являются комплексные числа. Пусть

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in C.$$

Для матриц норма Гельдера с показателем p ($p \geq 1$) в $M_n(C)$

$$N_p(A) = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^p \right)^{1/p}.$$

Норма при $p = 2$ называется нормой Фробениуса.

Определение. Говорят, что матричная норма $\|\cdot\|$ согласована с векторной $\|\cdot\|$, если выполняется неравенство $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ для любых $x \in C^n$, $A \in M_n(C)$.

Естественнее пользоваться операторной нормой матрицы.

Определение. Операторной нормой матрицы, порожденной векторной нормой $\|x\|$, называется число

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Операторная норма матрицы, порожденная некоторой векторной нормой, является минимальной среди всех матричных норм, согласованных с этой векторной нормой.

Операторную норму называют также нормой матрицы, подчиненной заданной векторной норме.

Определение. Спектральным радиусом матрицы A называется число

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|,$$

где λ_i — собственные числа матрицы A .

Можно показать, что

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\rho(AA^*)}.$$

Если $A = A^*$, то $\|A\|_2 = \rho(A)$.

Упражнение 2. Вычислить все нормы единичной матрицы.

Упражнение 3. Вычислить нормы Фробениуса, $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$ матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{bmatrix}.$$

Определение. Матричная норма называется мультипликативной, если $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$, $A, B \in M_n(C)$.

Операторная матричная норма и норма Фробениуса мультипликативны.

Теорема 1. $\rho(A) \leq \|A\|$, где $\|A\|$ согласована с векторной нормой.

Можно показать, что

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|} \leq |\lambda| \leq \|A\|.$$

Это неравенство позволяет найти оценки для собственных чисел матрицы по модулю.

10.3. Обусловленность задачи решения линейной алгебраической системы

Вычислительные задачи, в которых малым изменениям параметров отвечают большие изменения в решениях, называются плохо обусловленными.

Рассмотрим вопрос обусловленности задачи решения линейной алгебраической системы $Ax = b$. Пусть решением системы является вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)'$.

Рассмотрим систему уравнений

$$(A + \Delta A)(x^* + \Delta x) = b + \Delta b, \quad \text{где } \|A^{-1}\| \|\Delta A\| < 1.$$

Справедлива оценка

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x^*\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right),$$

где $\text{cond}(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$ — число обусловленности матрицы¹.

Очевидно, что $\text{cond}(A) \geq 1$, $\text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)$. Если $A = A^*$, то $\text{cond}_2(A) = |\lambda_1|/|\lambda_n|$, где $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ (λ_i — собственные числа матрицы A).

Упражнение 4. Линейная алгебраическая система $Ax = b$, где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1.99 \\ 1.97 \end{bmatrix},$$

имеет решение $x^* = (1, 1)'$.

Округлим правые части системы до целых, оставив элементы матрицы без изменений.

Система $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$, где $\Delta b = (0.01, 0.03)'$ имеет решение $x + \Delta x = (200, -200)'$.

Вычислить число обусловленности матрицы, фактическую относительную погрешность решения и получить для неё оценку.

10.4. Задание

Для заданной матрицы A

а) решить систему $Ax = b$, где

$$b = \begin{pmatrix} 200 \\ -600 \end{pmatrix};$$

б) решить систему с измененной правой частью $A\bar{x} = \bar{b}$, где

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 199 \\ -601 \end{pmatrix};$$

в) найти число обусловленности $\text{cond}(A)$, фактическую относительную погрешность $\delta x = \|\bar{x} - x\|/\|x\|$ и оценку для этой погрешности.

10.5. Варианты матриц

1	2	3	4
-400.60 199.80	-401.52 200.16	-401.43 200.19	-401.98 200.34
1198.80 -600.40	1200.96 -601.68	1201.14 -601.62	1202.04 -602.32
5	6	7	8
-401.46 200.18	-402.50 200.50	-402.90 200.70	-402.94 200.02
1201.08 -601.64	1203.00 -603.00	1204.20 -603.60	1200.12 -600.96
9	10	11	12
-401.64 200.12	-403.15 200.95	-401.00 200.00	-400.94 200.02
1200.72 -601.76	1205.70 -604.10	1200.00 -601.00	1200.12 -600.96

¹Число обусловленности матрицы зависит от выбранной нормы.

- 3) При вычислении решения (обратный ход) используются лишь элементы матрицы выше главной диагонали, поэтому можно не вычислять диагональные элементы и элементы ниже диагонали, что приведет к экономии времени.

В этом случае можно действовать по формулам

$$tmp = a_{kk}, \quad a_{kj} = \frac{a_{kj}}{tmp}, \quad tmp \neq 0, \quad j = k + 1, \dots, n + 1;$$

$$tmp = a_{ik}, \quad a_{ij} = a_{ij} - a_{kj} * tmp, \quad i = k + 1, k + 2, \dots, n, \quad j = k + 1, \dots, n + 1, \\ k = 1, 2, \dots, n.$$

- 4) Весь процесс решения требует порядка $\frac{2}{3}n^3$ арифметических операций.
- 5) Для построения обратной матрицы требуется решить n систем, правыми частями которых будут являться столбцы единичной матрицы.

11.2. Схема Жордана единственного деления

Схема Жордана приводит матрицу системы к единичной, так что решением системы является ее правая часть.

Алгоритм схемы Жордана отличается от схемы Гаусса тем, что обнуляются элементы не только ниже главной диагонали, но и выше.

Соответственно формулы таковы

$$tmp = a_{kk}, \quad a_{kj} = \frac{a_{kj}}{tmp}, \quad tmp \neq 0, \quad j = k, k + 1, \dots, n + 1,$$

$$tmp = a_{ik},$$

$$a_{ij} = a_{ij} - a_{kj} * tmp, \quad i = 1, 2, \dots, k - 1, k + 1, k + 2, \dots, n; \quad j = k, k + 1, \dots, n + 1, \\ k = 1, 2, \dots, n.$$

11.3. Схемы с выбором главного элемента

Во избежание деления на малый ведущий элемент рекомендуется осуществлять выбор наибольшего по модулю элемента и считать его ведущим.

Различают три варианта

- 1) Выбор главного элемента по столбцу

Пусть

$|a_{pk}| \geq |a_{ik}|, \quad i = k, k + 1, \dots, n.$ Тогда следует поменять местами элементы p -ой и k -ой строк матрицы, то есть $a_{pj} \leftrightarrow a_{kj}, \quad j = 1, 2, \dots, n + 1.$

- 2) Выбор главного элемента по строке

Пусть

$|a_{kq}| \geq |a_{kj}|, \quad j = k, k + 1, \dots, n.$ Тогда следует поменять местами элементы q -ого и k -ого столбцов матрицы, то есть $a_{iq} \leftrightarrow a_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$

Кроме того, при перестановке столбцов меняется порядок неизвестных, поэтому в этом случае надо запомнить новый порядок неизвестных. Для этого надо сформировать массив с элементами, соответствующими порядку неизвестных. Сначала там

должен быть обеспечен порядок неизвестных от 1 до n . По мере перестановки столбцов элементы этого массива с индексами q и k тоже надо поменять местами. При обратном ходе вместо индекса массива неизвестных надо использовать элемент этого массива, например $x[ordx[i]]$.

3) Выбор главного элемента по строке и по столбцу

Пусть $|a_{pq}| \geq |a_{ij}|, i = k, k + 1, \dots, n; j = k, \dots, n$. Тогда следует поменять местами элементы q -ого и k -ого столбцов матрицы, p -ой и k -ой строк матрицы, то есть $a_{iq} \leftrightarrow a_{ik}, i = 1, 2, \dots, n, a_{pj} \leftrightarrow a_{kj}, j = 1, 2, \dots, n + 1$.

Также следует запомнить порядок неизвестных.

11.4. LU -разложение

LU -разложение — представление матрицы A в виде LU , где L — нижнетреугольная матрица, а U — верхнетреугольная с единичной главной диагональю

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Построить матрицы L и U можно по следующему алгоритму:

Для $i = 1, \dots, n$ выполнять поочередно пункты 1 и 2

$$1) \quad l_{ji} = a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki}, \quad j = i, \dots, n;$$

$$2) \quad u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}}{l_{ii}}, \quad j = i, \dots, n.$$

LU -разложение можно использовать для решения следующих задач:

1) Решение системы линейных уравнений $Ax = b$, приведенной к виду $LUx = b$ в два шага. На первом шаге решается система $Ly = b$, на втором система $Ux = y$.

Промежуточное решение y выгодно вычислять вместе с коэффициентами u_{ij} , взяв в качестве матрицы A расширенную матрицу со столбцом свободных членов, а U должна быть расширенной матрицей для столбца вектора y . Тогда цикл по j для вычисления элементов u_{ij} следует выполнять до $n + 1$.

2) Вычисление определителя матрицы A

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U) = \det(L) = \prod_{i=1}^n l_{ii}.$$

3) Нахождение обратной матрицы A^{-1} . Для этого следует решить n систем с матрицей LU , а правыми частями будут столбцы единичной матрицы.

11.5. Задание

Для матрицы A , выбранной самостоятельно, найти обратную матрицу A^{-1} , число обусловленности и решение системы $Ax = b$ по схеме Гаусса и LU -разложения, используя программу на алгоритмическом языке.

Программа должна содержать

- 1) Подпрограмму решения системы по схеме Гаусса единственного деления с выдачей диагностики в случае слишком малого ведущего элемента.
- 2) Подпрограмму решения системы, используя LU -разложение.
- 3) Подпрограмму решения системы по схеме Гаусса с выбором главного элемента (вариант выбора указывается преподавателем).
- 4) Подпрограмму нахождения обратной матрицы.

Параметрами подпрограмм должны являться порядок системы, расширенная матрица системы или матрица системы при нахождении обратной матрицы.

На печать рекомендуется выводить матрицу системы, решение, компоненты вектора невязки $R = b - Ax$.

Отладка программы должна содержать следующие пункты:

- решение системы $Ax = b$ по схеме единственного деления и по схеме с выбором главного элемента. О качестве результата судим по невязке;
- решение системы $Cx = b$ по схеме единственного деления и по схеме с выбором главного элемента, где матрица C отличается от матрицы **лишь** одним элементом $c_{11} = 10^{-8}a_{11}$.

Проанализировать результаты.

11.6. Варианты расширенных матриц

Вариант 1

3.278164	1.046583	-1.378574	-0.527466
1.046583	2.975937	0.934251	2.526877
-1.378574	0.934251	4.836173	5.165441

Вариант 2

7.35272	0.88255	-2.270052	1
0.88255	5.58351	0.528167	0
-2.27005	0.528167	4.430329	0

Вариант 3

8.29381	0.995516	-0.560617	0.766522
0.995516	6.298198	0.595772	3.844422
-0.560617	0.595772	4.997407	5.239231

Вариант 4

8.29381	0.995516	-0.560617	1
0.995516	6.298198	0.595772	0
-0.560617	0.595772	4.997407	0

Вариант 5

8.673134	1.041039	-2.677712	-1.289879
1.041039	6.586211	0.623016	4.020225
-2.677712	0.623016	5.225935	5.269671

Вариант 6

9.016024	1.082197	-2.783575	-1.340873
1.082197	6.846595	0.647647	4.179164
-2.783575	0.647647	5.432541	5.478007

Вариант 7

9.331343	1.120045	-2.880925	7.570463
1.120045	7.086042	0.670297	8.876384
-2.880925	0.670297	5.622534	3.411906

Вариант 8

9.62483	1.15527	-2.97153	8.71670
1.15527	7.30891	0.69138	5.15541
-2.97153	0.69138	5.79937	0.27384

Вариант 9

12.785723	1.534675	-3.947418	9.60565
1.534675	9.709232	0.918435	7.30777
-3.947418	0.918435	7.703946	4.21575

Вариант 10

12.44310	1.493550	-3.841638	5.047556
1.493550	9.449050	0.893829	5.918212
-3.841638	0.893829	7.49750	2.274843

Вариант 11

6.687233	0.80267	-2.06459	0
0.80267	5.07816	0.48037	1
-2.06459	0.48037	4.02934	0

Вариант 12

12.951443	1.554567	-3.998582	4.03171
1.554567	9.835076	0.930339	11.5427
-3.998582	0.930339	7.80380	6.73485

Вариант 13

5.673134	1.041039	-2.677712	0
1.041039	2.586211	0.623016	1
-2.677712	0.623016	4.225935	0

Вариант 14

9.016024	1.082197	-2.783575	0
1.082197	4.543595	0.647647	0
-2.783575	0.647647	5.432541	1

12. Итерационные методы решения линейных систем

Пусть требуется решить линейную систему n -ого порядка $Ax = b$.

Для решения линейной системы итерационными методами ее необходимо привести эквивалентно к виду $x = Hx + g$.

Выбираем начальное приближение $x^{(0)}$ (например, вектор с нулевыми компонентами).

12.1. Метод простой итерации

12.1.1. Расчетная формула. Условие сходимости

Расчетная формула метода имеет вид

$$x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + g \quad (1)$$

или покомпонентно

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n h_{ij}x_j^{(k)} + g_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Необходимое и достаточное условие сходимости: $\rho(H) < 1$, где $\rho(H)$ — спектральный радиус матрицы H .

Достаточное условие сходимости: $\|H\| < 1$, где матричная норма мультипликативна.

12.1.2. Получение решения с заданной точностью

Пусть x^* — точное решение системы, $x^{(k)}$ — решение, полученное на k -ой итерации.

Из расчетной формулы (1) легко получить оценку

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq \|H\| \|x^{(k)} - x^*\|, \quad (3)$$

но скорость сходимости метода простой итерации определяется не нормой $\|H\|$, а спектральным радиусом $\rho(H)$.

Пусть требуется найти такое $x^{(k)}$, чтобы $\|x^{(k)} - x^*\| < \varepsilon$ (фактическая погрешность $x^{(k)}$).

Для обеспечения заданной точности используется априорная оценка погрешности приближенного решения $x^{(k)}$

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \|H\|^k \|x^{(0)}\| + \frac{\|H\|^k}{1 - \|H\|} \|g\| \quad (4)$$

или апостериорная

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|H\|}{1 - \|H\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|. \quad (5)$$

Очевидно, что если

$$\|H\| \leq \frac{1}{2},$$

то

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < \varepsilon \Rightarrow \|x^{(k)} - x^*\| < \varepsilon.$$

12.2. Метод Зейделя

Расчетная формула покомпонентно имеет следующий вид:

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} h_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^n h_{ij} x_j^{(k)} + g_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Представим эту формулу в векторном виде.

Матрицу H представим в виде $H = H_L + H_R$, где

$$H_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad H_R = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ 0 & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & h_{nn} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Тогда

$$x^{(k+1)} = H_L x^{(k+1)} + H_R x^{(k)} + g, \quad (8)$$

следовательно расчетная формула метода Зейделя в векторном виде такова

$$x^{(k+1)} = (E - H_L)^{-1} H_R x^{(k)} + (E - H_L)^{-1} g. \quad (9)$$

Метод Зейделя для системы $x = Hx + g$ совпадает с методом итерации для системы

$$x = H_{seid} x + g_{seid}, \quad \text{где } H_{seid} = (E - H_L)^{-1} H_R, \quad g_{seid} = (E - H_L)^{-1} g. \quad (10)$$

Достаточное условие сходимости: $\|H\|_\infty < 1$ или $\|H\|_1 < 1$.

Области сходимости методов итерации и Зейделя различны.

Заметим, что для получения решения методом Зейделя экономичнее пользоваться расчетной формулой (6), а строить матрицу H_{seid} полезно лишь для исследования скорости сходимости метода.

12.3. Приведение системы вида $Ax = b$ к виду $x = Hx + g$

Рассмотрим частные случаи.

- 1) Пусть матрица A имеет диагональное преобладание, тогда $H = E - D^{-1}A$, $g = D^{-1}b$, где D — диагональная матрица, у которой на диагонали стоят диагональные элементы матрицы A .

В этом случае элементы матрицы H и столбца свободных членов g вычисляются по следующим формулам:

$$h_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j, \end{cases} \quad g_i = \frac{b_i}{a_{ii}}. \quad (11)$$

Очевидно, что достаточное условие сходимости метода простой итерации, который в этом случае называется методом Якоби, будет выполнено.

Посмотрим, какой вид в этом случае будут иметь H_{seid} и g_{seid} .

Обозначим

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Тогда $A = L + D + R$, так что в прежних обозначениях $H_L = -D^{-1}L$, $H_R = -D^{-1}R$,

$$H_{seid} = (E - H_L)^{-1}H_R = -(E + D^{-1}L)D^{-1}R = -(D + L)^{-1}R, \quad g_{seid} = (D + L)^{-1}g. \quad (14)$$

Известно, что если матрица A положительно определена, то метод Зейделя, называемый в этом случае методом Некрасова, для системы $Ax = b$ сходится.

В данном случае для метода Зейделя справедлива апостериорная оценка погрешности

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|H_R\|}{1 - \|H\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|, \quad (15)$$

где H_R, H определяются формулами (7), (11).

Заметим, что в данном случае диагональные элементы матриц H и H_R — нулевые.

2) Пусть A самосопряженная ($A = A^*$) и положительно определенная матрица,

$$0 < m \leq \lambda(A) \leq M, \quad \alpha = 2/(m + M),$$

тогда матрицу H и столбец свободных членов g можно строить следующим образом:

$$H = E - \alpha A, \quad g = \alpha b.$$

Параметр α называется оптимальным параметром.

Оценки m, M для собственных чисел матрицы A можно найти, используя теорему о кругах Гершгорина.

Упражнение

Проверить выполнение необходимого и достаточного условия сходимости.

12.4. Метод верхней релаксации

Расчетная формула метода для системы $Ax = b$:

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + q \frac{b_i - (a_{i1}x_1^{(k)} + \dots + a_{ii-1}x_{i-1}^{(k)} + a_{ii}x_i^{(k-1)} + \dots + a_{in}x_n^{(k-1)})}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

Метод будет сходиться, если матрица самосопряженная, положительно-определенная и кроме того $0 < q < 2$.

Для системы $x = Hx + g$, где H и g строятся по формулам (11), расчетная формула, очевидно, примет следующий вид:

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + q \left(\sum_{j=1}^{i-1} h_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n h_{ij} x_j^{(k-1)} - x_i^{(k-1)} + g_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

Быстрота сходимости релаксационного циклического процесса определяется наибольшим модулем собственных значений матрицы $S_q = (D + qL)^{-1}(D - qD - qR)$, где D , L и R диагональная, поддиагональная и наддиагональная части матрицы A . Оптимальное значение q вычисляется по формуле:

$$q_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(H)}}, \quad (18)$$

здесь $\rho(H)$ — спектральный радиус матрицы H .

Если же $\rho(H)$ неизвестно, его определяют экспериментально при решении системы методом простой итерации. Если наибольшее по модулю собственное значение матрицы H отделено от остальных собственных значений, то оно может быть определено из отношений одноименных компонент векторов $x^{(k+1)} - x^{(k)}$ и $x^{(k)} - x^{(k-1)}$. Действительно, $x^{(k+1)} - x^{(k)} = H^k(x^{(1)} - x^{(0)})$, $x^{(k)} - x^{(k-1)} = H^{k-1}(x^{(1)} - x^{(0)})$. В качестве приближения к $\rho(H)$ можно взять отношение норм векторов $x^{(k+1)} - x^{(k)}$ и $x^{(k)} - x^{(k-1)}$ при достаточно больших значениях k .

Заметим, что спектральный радиус матрицы перехода в методе верхней релаксации, от которого зависит скорость сходимости метода, $\rho(S_q) = q_{opt} - 1$.

В численных результатах следует привести значение q_{opt} и убедиться, что оно является оптимальным, то есть реализовать алгоритм, например, с $q_1 = q_{opt} - 0.1$ и $q_2 = q_{opt} + 0.1$. Сравнить результаты.

Метод верхней релаксации совпадает с методом Зейделя при $q = 1$.

12.5. Итерационный метод с чебышевским набором параметров

Пусть $0 < m \leq \lambda(A) \leq M$.

Расчетная формула метода

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \tau_k(b - Ax^{(k-1)}), \quad k = 1, \dots, p, \quad (19)$$

где

$$\tau_k = \frac{2}{M + m - (M - m) \cos \frac{2k - 1}{2p} \pi}. \quad (20)$$

Этот метод может быть применен, если матрица A симметрическая и положительно-определенная.

Для устойчивости процесса итерационные параметры должны быть упорядочены специальным образом. Для упорядочения итерационных параметров надо построить последовательность нечетных чисел $\theta_p = \{\theta_p(1), \theta_p(2), \dots, \theta_p(p)\}$, таких, что $1 \leq \theta_p(i) \leq 2p - 1$, и параметры τ_k вычислять по формуле

$$\tau_k = \frac{2}{(M + m - (M - m)t_k}, \quad t_k = \cos \frac{\theta_p(k)}{2p} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, p. \quad (21)$$

Рассмотрим способ упорядочения θ_p для случая, когда p есть степень двойки: $p = 2^l, l > 0$.

Считая, что $\theta_1 = \{1\}$, поэтапно вычисляются $\theta_2, \theta_4, \dots, \theta_{2^p}$ следующим образом:

$$\theta_{2l}(2i - 1) = \theta_l(i), \quad \theta_{2l}(2i) = 4l - \theta_{2l}(2i - 1), \quad i = 1, 2, \dots, 2^{p-1},$$

так что

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \{1, 3\}, \\ \theta_4 &= \{1, 7, 3, 5\}, \\ \theta_8 &= \{1, 15, 7, 9, 3, 13, 5, 11\}, \\ \theta_{16} &= \{1, 31, 15, 17, 7, 25, 9, 23, 3, 29, 13, 19, 5, 27, 11, 21\}. \end{aligned}$$

Заметим, что при численной реализации этого метода следует выполнить именно p итераций. Если этого оказалось недостаточно для достижения заданной точности, то надо выполнить еще p итераций и т. д., т. е. процесс следует повторять число раз кратное p .

Число итераций для достижения заданной точности ε определяется по формуле

$$n(\varepsilon) \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M}{m}} \ln \frac{2}{\varepsilon}. \quad (22)$$

При $p = 1$ метод совпадает с методом итераций с оптимальным параметром.

12.6. Метод Люстерника ускорения сходимости метода последовательных приближений

Метод Люстерника ускорения сходимости может быть применен, если максимальное по модулю собственное число матрицы перехода H , имеющей полную систему собственных векторов, единственно, т. е. $1 > \rho(H) = |\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$.

Зная $\rho(H)$, можно уточнить приближённое решение по построенным ранее приближениям $x^{(k-1)}$ и $x^{(k)}$ по формуле

$$\bar{x} = x^{(k-1)} + \frac{1}{1 - \rho(H)} (x^{(k)} - x^{(k-1)}). \quad (23)$$

Метод особенно эффективен, если $|\lambda_1|$ существенно больше, чем $|\lambda_2|$.

12.7. Варианты заданий

Вариант 1

Дана линейная система $Ax = b$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
- 2) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_D x + g_D$, где $H_D = E - D^{-1}A$, $g_D = D^{-1}b$. Здесь D — диагональная матрица, у которой на диагонали находятся диагональные элементы матрицы A . Вычислить $\|H_D\|_\infty$.
- 3) Вычислить априорную оценку погрешности $\|x^{(7)} - x^*\|_\infty$.

- 4) Вычислить приближение $x^{(7)}$ методом простой итерации. Вывести его фактическую погрешность, апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить приближение $x^{(7)}$ к решению системы $x = H_D x + g_D$ методом Зейделя. Вывести его фактическую погрешность. Сравнить с решением, полученным методом простой итерации.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации.
- 7) Вычислить приближение $x^{(7)}$ методом верхней релаксации.

Сравнить фактические погрешности $x^{(7)}$, полученного различными методами.

Вариант 2

Дана линейная система $Ax = b$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
- 2) Используя теорему о кругах Гершгорина определить такие m и M , что $0 < m \leq \lambda_i(A) \leq M$, вычислить оптимальный параметр $\alpha = 2/(m + M)$.
- 3) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_\alpha x + g_\alpha$, где $H_\alpha = E - \alpha A$, $g_\alpha = \alpha b$. Вычислить $\|H_\alpha\|_\infty$.
- 4) Вычислить априорную оценку погрешности $\|x^{(9)} - x^*\|_\infty$. Вычислить $x^{(9)}$ методом итерации с оптимальным параметром. Вывести его фактическую погрешность, апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить приближение $x^{(9)}$ к решению системы $x = H_\alpha x + g_\alpha$ методом Зейделя. Вывести его фактическую погрешность. Сравнить с решением, полученным методом простой итерации.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 7) Вычислить приближение $x^{(9)}$ методом верхней релаксации.

Сравнить фактические погрешности $x^{(9)}$, полученного различными методами.

Вариант 3

Дана линейная система $Ax = b$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.

- 2) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_D x + g_D$, где $H_D = E - D^{-1}A$, $g_D = D^{-1}b$. Здесь D - диагональная матрица, у которой на диагонали находятся диагональные элементы матрицы A . Вычислить $\|H_D\|_\infty$.
- 3) Найти априорную оценку того k , при котором $\|x^* - x^k\|_\infty < \varepsilon$, $\varepsilon = 0.001$.
- 4) Вычислить решение методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 0.001$. Сравнить требуемое фактическое число итераций с априорным значением k . Вывести фактическую погрешность, апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить решение системы $x = H_D x + g_D$ методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0.001$.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Сравнить результаты с результатами, полученными методом простой итерации.
- 7) Получить решение системы $Ax = b$ методом верхней релаксации с точностью $\varepsilon = 0.001$. В качестве критерия использовать фактическую погрешность.

Сравнить требуемое количество итераций в различных методах.

Вариант 4

Дана линейная система $Ax = f$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
- 2) Используя теорему о кругах Гершгорина определить такие m и M , что $0 < m \leq \lambda_i(A) \leq M$, вычислить оптимальный параметр $\alpha = 2/(m + M)$.
- 3) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_\alpha x + g_\alpha$, где $H_\alpha = E - \alpha A$, $g_\alpha = \alpha f$. Вычислить $\|H_\alpha\|_\infty$.
- 4) Вычислить $x^{(8)}$ методом итерации с оптимальным параметром. Вычислить апостериорную оценку погрешности $\|x^{(8)} - x^*\|_\infty$. Сравнить апостериорную оценку с фактической погрешностью. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить приближение $x^{(8)}$ к решению системы $x = H_\alpha x + g_\alpha$ методом Зейделя. Вывести его фактическую погрешность. Сравнить с решением, полученным методом простой итерации.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 7) Вычислить $x^{(8)}$ методом верхней релаксации.
- 8) *Получить решение системы $Ax = b$ методом с чебышевским набором параметров с точностью $\varepsilon = 0.00001$. В качестве критерия использовать фактическую погрешность.

Сравнить фактические погрешности $x^{(8)}$, полученного различными методами.

Вариант 5

Дана линейная система $Ax = b$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
- 2) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_D x + g_D$, где $H_D = E - D^{-1}A$, $g_D = D^{-1}b$. Здесь D - диагональная матрица, у которой на диагонали находятся диагональные элементы матрицы A . Вычислить $\|H_D\|_\infty$.
- 3) Найти априорную оценку того k , при котором $\|x^* - x^k\|_\infty < \varepsilon$, $\varepsilon = 0.00001$.
- 4) Вычислить решение методом итерации с точностью $\varepsilon = 0.00001$, сравнить требуемое фактическое число итераций с априорным значением k . Вывести фактическую погрешность x^k , апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить решение системы $x = H_D x + g_D$ методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0.00001$. Сравнить требуемое количество итераций с количеством итераций, требуемым в методе простой итерации.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 7) Получить решение системы $Ax = b$ методом верхней релаксации с точностью $\varepsilon = 0.00001$. В качестве критерия использовать фактическую погрешность.
- 8) *Получить решение системы $Ax = b$ методом с чебышевским набором параметров с точностью $\varepsilon = 0.00001$.

Сравнить требуемое количество итераций в различных методах.

Вариант 6

Дана линейная система $Ax = b$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
- 2) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_D x + g_D$, где $H_D = E - D^{-1}A$, $g_D = D^{-1}b$. Здесь D - диагональная матрица, у которой на диагонали находятся диагональные элементы матрицы A . Вычислить $\|H_D\|_\infty$.
- 3) Вычислить $x^{(10)}$ методом простой итерации.
- 4) Вычислить апостериорную оценку погрешности $\|x^{(10)} - x^*\|_\infty$. Сравнить апостериорную оценку с фактической погрешностью.

- 5) Вычислить приближение $x^{(10)}$ к решению системы $x = Hx + g$ методом Зейделя. Вывести его фактическую погрешность. Сравнить с решением, полученным методом простой итерации.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 7) Вычислить $x^{(10)}$ методом верхней релаксации.

Сравнить фактические погрешности $x^{(10)}$, полученного различными методами.

Вариант 7

Дана линейная система $Ax = b$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
- 2) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_D x + g_D$, где $H_D = E - D^{-1}A$, $g_D = D^{-1}b$. Здесь D — диагональная матрица, у которой на диагонали находятся диагональные элементы матрицы A . Вычислить $\|H_D\|_\infty$.
- 3) Вычислить априорную оценку погрешности $\|x^{(7)} - x^*\|_\infty$.
- 4) Вычислить $x^{(7)}$ методом простой итерации. Вывести его фактическую погрешность, апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить приближение $x^{(7)}$ к решению системы $x = H_D x + g_D$ методом Зейделя. Вывести его фактическую погрешность. Сравнить с решением, полученным методом простой итерации.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации.
- 7) Вычислить $x^{(7)}$ методом верхней релаксации.

Сравнить фактические погрешности $x^{(7)}$, полученного различными методами.

Вариант 8

Дана линейная система $Ax = b$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
- 2) Используя теорему о кругах Гершгорина определить такие m и M , что $0 < m \leq \lambda_i(A) \leq M$, вычислить оптимальный параметр $\alpha = 2/(m + M)$.
- 3) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_\alpha x + g_\alpha$, где $H_\alpha = E - \alpha A$, $g_\alpha = \alpha b$. Вычислить $\|H_\alpha\|_\infty$.

- 4) Вычислить априорную оценку погрешности $\|x^{(9)} - x^*\|_\infty$. Вычислить $x^{(9)}$ методом итерации с оптимальным параметром. Вывести его фактическую погрешность, апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить приближение $x^{(9)}$ к решению системы $x = H_\alpha x + g_\alpha$ методом Зейделя. Вывести его фактическую погрешность. Сравнить с решением, полученным методом простой итерации.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 7) Вычислить $x^{(9)}$ методом верхней релаксации.
- 8) *Получить решение системы $Ax = b$ методом с чебышевским набором параметров с точностью $\varepsilon = 0.00001$. В качестве критерия использовать фактическую погрешность.

Сравнить фактические погрешности $x^{(9)}$, полученного различными методами.

Вариант 9

Дана линейная система $Ax = b$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
- 2) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_D x + g_D$, где $H_D = E - D^{-1}A$, $g_D = D^{-1}b$. Здесь D - диагональная матрица, у которой на диагонали находятся диагональные элементы матрицы A . Вычислить $\|H_D\|_\infty$.
- 3) Найти априорную оценку того k , при котором $\|x^* - x^k\|_\infty < \varepsilon$, $\varepsilon = 0.001$.
- 4) Вычислить решение методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 0.001$. Сравнить требуемое фактическое число итераций с априорным значением k . Вывести фактическую погрешность, апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить решение системы $x = H_D x + g_D$ методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0.001$.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Сравнить результаты с результатами, полученными методом простой итерации.
- 7) Получить решение системы $Ax = b$ методом верхней релаксации с точностью $\varepsilon = 0.001$. В качестве критерия использовать фактическую погрешность.

Сравнить требуемое количество итераций в различных методах.

Вариант 10

Дана линейная система $Ax = f$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
- 2) Используя теорему о кругах Гершгорина определить такие m и M , что $0 < m \leq \lambda_i(A) \leq M$, вычислить оптимальный параметр $\alpha = 2/(m + M)$.
- 3) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_\alpha x + g_\alpha$, где $H_\alpha = E - \alpha A$, $g_\alpha = \alpha f$. Вычислить $\|H_\alpha\|_\infty$.
- 4) Вычислить $x^{(8)}$ методом итерации с оптимальным параметром. Вычислить апостериорную оценку погрешности $\|x^{(8)} - x^*\|_\infty$. Сравнить апостериорную оценку с фактической погрешностью. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить приближение $x^{(8)}$ к решению системы $x = H_\alpha x + g_\alpha$ методом Зейделя. Вывести его фактическую погрешность. Сравнить с решением, полученным методом простой итерации.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 7) Вычислить $x^{(8)}$ методом верхней релаксации.
- 8) *Получить решение системы $Ax = b$ методом с чебышевским набором параметров с точностью $\varepsilon = 0.00001$. В качестве критерия использовать фактическую погрешность.

Сравнить фактические погрешности $x^{(8)}$, полученного различными методами.

Вариант 11

Дана линейная система $Ax = b$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
- 2) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_D x + g_D$, где $H_D = E - D^{-1}A$, $g_D = D^{-1}b$. Здесь D - диагональная матрица, у которой на диагонали находятся диагональные элементы матрицы A . Вычислить $\|H_D\|_\infty$.
- 3) Найти априорную оценку того k , при котором $\|x^* - x^k\|_\infty < \varepsilon$, $\varepsilon = 0.0001$.
- 4) Вычислить решение методом итерации с точностью ε , сравнить требуемое фактическое число итераций с априорным значением k . Вывести фактическую погрешность x^k , апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить решение системы $x = H_D x + g_D$ методом Зейделя с точностью ε .

- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 7) Получить решение системы $Ax = b$ методом верхней релаксации с точностью ε . В качестве критерия использовать фактическую погрешность.
- 8) *Получить решение системы $Ax = b$ методом с чебышевским набором параметров с точностью $\varepsilon = 0.0001$.

Сравнить требуемое количество итераций в различных методах.

Вариант 12

Дана линейная система $Ax = b$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
- 2) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_D x + g_D$, где $H_D = E - D^{-1}A$, $g_D = D^{-1}b$. Здесь D - диагональная матрица, у которой на диагонали находятся диагональные элементы матрицы A . Вычислить $\|H_D\|_\infty$.
- 3) Вычислить $x^{(7)}$ методом простой итерации.
- 4) Вычислить апостериорную оценку погрешности $\|x^{(7)} - x^*\|_\infty$. Сравнить апостериорную оценку с фактической погрешностью.
- 5) Вычислить приближение $x^{(7)}$ к решению системы $x = H_D x + g_D$ методом Зейделя. Вывести его фактическую погрешность. Сравнить с решением, полученным методом простой итерации.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 7) Вычислить $x^{(7)}$ методом верхней релаксации.

Сравнить фактические погрешности $x^{(7)}$, полученного различными методами.

Вариант 13

Дана линейная система $Ax = b$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
- 2) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_D x + g_D$, где $H_D = E - D^{-1}A$, $g_D = D^{-1}b$. Здесь D - диагональная матрица, у которой на диагонали находятся диагональные элементы матрицы A . Вычислить $\|H_D\|_\infty$.
- 3) Найти априорную оценку того k , при котором $\|x^* - x^k\|_\infty < \varepsilon$, $\varepsilon = 0.000001$.

- 4) Вычислить решение методом итерации с точностью ε , сравнить требуемое фактическое число итераций с априорным значением k . Вывести фактическую погрешность x^k , апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить решение системы $x = H_D x + g_D$ методом Зейделя с точностью ε .
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 7) Получить решение системы $Ax = b$ методом верхней релаксации с точностью ε . В качестве критерия использовать фактическую погрешность.
- 8) *Получить решение системы $Ax = b$ методом с чебышевским набором параметров с точностью $\varepsilon = 0.00001$.

Сравнить требуемое количество итераций в различных методах.

Вариант 14

Дана линейная система $Ax = b$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
- 2) Используя теорему о кругах Гершгорина определить такие m и M , что $0 < m \leq \lambda_i(A) \leq M$, вычислить оптимальный параметр $\alpha = 2/(m + M)$.
- 3) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_\alpha x + g_\alpha$, где $H_\alpha = E - \alpha A$, $g_\alpha = \alpha b$. Вычислить $\|H_\alpha\|_\infty$.
- 4) Вычислить априорную оценку погрешности $\|x^{(9)} - x^*\|_\infty$. Вычислить $x^{(9)}$ методом итерации с оптимальным параметром. Вывести его фактическую погрешность, апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить приближение $x^{(9)}$ к решению системы $x = H_\alpha x + g_\alpha$ методом Зейделя. Вывести его фактическую погрешность. Сравнить с решением, полученным методом простой итерации.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 7) Вычислить $x^{(9)}$ методом верхней релаксации.

Сравнить фактические погрешности $x^{(9)}$, полученного различными методами.

Вариант 15

Дана линейная система $Ax = b$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
- 2) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_D x + g_D$, где $H_D = E - D^{-1}A$, $g_D = D^{-1}b$. Здесь D - диагональная матрица, у которой на диагонали находятся диагональные элементы матрицы A . Вычислить $\|H_D\|_\infty$.
- 3) Найти априорную оценку того k , при котором $\|x^* - x^k\|_\infty < \varepsilon$, $\varepsilon = 0.000001$.
- 4) Вычислить решение методом итерации с точностью ε , сравнить требуемое фактическое число итераций с априорным значением k . Вывести фактическую погрешность x^k , апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить решение системы $x = H_D x + g_D$ методом Зейделя с точностью ε .
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 7) Получить решение системы $Ax = b$ методом верхней релаксации с точностью ε . В качестве критерия использовать фактическую погрешность.

Сравнить требуемое количество итераций в различных методах.

Вариант 16

Дана линейная система $Ax = b$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
- 2) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_D x + g_D$, где $H_D = E - D^{-1}A$, $g_D = D^{-1}b$. Здесь D - диагональная матрица, у которой на диагонали находятся диагональные элементы матрицы A . Вычислить $\|H_D\|_\infty$.
- 3) Вычислить априорную оценку погрешности $\|x^{(7)} - x^*\|_\infty$.
- 4) Вычислить $x^{(9)}$ методом простой итерации. Вывести его фактическую погрешность, апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить приближение $x^{(9)}$ к решению системы $x = H_D x + g_D$ методом Зейделя. Вывести его фактическую погрешность. Сравнить с решением, полученным методом простой итерации.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации.
- 7) Вычислить $x^{(9)}$ методом верхней релаксации.

Сравнить фактические погрешности $x^{(9)}$, полученного различными методами.

13. Проблема собственных значений

Требуется найти собственные значения λ матрицы A и соответствующие этим собственным значениям собственные векторы x , так что $Ax = \lambda x$.

13.1. Метод вращений (Якоби) решения полной проблемы собственных значений и векторов матрицы

Теорема 1. Если A — эрмитова матрица, то существует такая унитарная матрица V , что преобразование подобия с этой матрицей приводит A к диагональному виду, т. е. $V^{-1}AV = \Lambda$, где Λ — диагональная матрица из собственных значений матрицы A .

Для унитарной матрицы $V^{-1} = V^*$.

Частным случаем унитарной матрицы является ортогональная матрица, для которой выполнено следующее:

$$\sum_{i=1}^n V_{ij}^2 = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^n V_{il}V_{ij} = 0, \quad j \neq l.$$

Обозначим через V^T транспонированную матрицу.

Так как $V^T V = E$, то $V^{-1} = V^T$ и преобразование подобия принимает вид $V^T A V = \Lambda$. Задачу нахождения такой матрицы V решают последовательно.

Пусть A — вещественная симметричная матрица. Для такой матрицы метод вращений заключается в построении последовательности матриц $A^{(0)} = A, A^{(1)}, \dots, A^{(k)}, \dots$, так чтобы $A^k \rightarrow \Lambda$. Здесь каждая последующая матрица получается из предыдущей при помощи элементарного шага, состоящего в преобразовании подобия предыдущей матрицы посредством некоторой ортогональной матрицы вращения

$$A^{(k+1)} = V_{i_k j_k}^T(\varphi_k) A^{(k)} V_{i_k j_k}(\varphi_k). \quad (1)$$

У матрицы $V_{i_k j_k}(\varphi_k)$ на диагонали стоят единицы всюду, кроме i_k -ой и j_k -ой строк ($i_k < j_k$) и нули выше и ниже главной диагонали, кроме двух элементов, так что элементы матрицы V описываются следующим образом:

$$\begin{aligned} v_{ii} &= 1, \quad i \neq i_k, \quad i \neq j_k, \\ v_{i_k i_k} &= c, \quad v_{j_k j_k} = c, \quad c = \cos(\varphi_k), \\ v_{ij} &= 0, \quad i \neq i_k, \quad i \neq j_k, \quad j \neq i_k, \quad j \neq j_k, \\ v_{i_k j_k} &= -s, \quad v_{j_k i_k} = s, \quad s = \sin(\varphi_k). \end{aligned} \quad (2)$$

При $n = 3, i_k = 1, j_k = 3$ матрица будет иметь вид

$$V_{13}(\varphi_k) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_k & 0 & -\sin \varphi_k \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_k & 0 & \cos \varphi_k \end{pmatrix}.$$

Матрица $A^{(k+1)}$ строится из $A^{(k)}$ так, чтобы $t^2(A^{(k+1)}) < t^2(A^{(k)})$, где

$$t^2(A^{(k)}) = \sum_{i,j=1, i \neq j}^n a_{ij}^{(k)2}.$$

Можно показать, что при определенном выборе i_k, j_k, φ_k

$$t^2(A^{(k+1)}) \leq t^2(A^{(k)}) \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right) \quad (3)$$

и следовательно

$$t^2(A^{(k)}) \rightarrow 0.$$

Для этого i_k, j_k выбираются как индексы максимального по модулю из наддиагональных элементов матрицы, то есть

$$|a_{i_k j_k}^{(k)}| = \max_{\substack{i, j=1..n \\ i < j}} |a_{ij}^{(k)}|,$$

а угол φ_k выбирается так, чтобы

$$a_{i_k j_k}^{(k+1)} = \frac{a_{j_k j_k}^{(k)} - a_{i_k i_k}^{(k)}}{2} \sin(2\varphi) + a_{i_k j_k}^{(k)} \cos(2\varphi) = 0.$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{tg}(2\varphi_k) = \frac{2a_{i_k j_k}^{(k)}}{a_{i_k i_k}^{(k)} - a_{j_k j_k}^{(k)}}, \quad |\varphi_k| < \frac{\pi}{4}. \quad (4)$$

Если в (4) знаменатель нулевой, то $|\varphi_k| = \frac{\pi}{4}$. Значения $c = \cos(\varphi_k)$ и $s = \sin(\varphi_k)$ можно вычислить и следующим образом:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{|a_{i_k i_k} - a_{j_k j_k}|}{d}\right)}, \\ s &= \operatorname{sign}(a_{i_k j_k} (a_{i_k i_k} - a_{j_k j_k})) \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{|a_{i_k i_k} - a_{j_k j_k}|}{d}\right)}, \\ \text{где } d &= \sqrt{(a_{i_k i_k} - a_{j_k j_k})^2 + 4a_{i_k j_k}^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что если собственные числа простые ($\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$) и

$$|a_{ij}^{(k)}| < \varepsilon, \quad i \neq j,$$

то

$$\lambda_i = a_{ii}^{(k)} + O(\varepsilon^2).$$

Собственные числа можно уточнить по следующей формуле:

$$\lambda_i^{(k)} = a_{ii}^{(k)} + \sum_{j \neq i} \frac{a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}}, \quad (6)$$

тогда

$$\lambda_i = \lambda_i^{(k)} + O(\varepsilon^3).$$

Рассмотрим формулы для элементов матрицы $A^{(k+1)}$.

Обозначим

$$B^{(k)} = A^{(k)} V_{i_k j_k}(\varphi_k),$$

тогда очевидно, что у матрицы $B^{(k)}$ изменятся только i_k и j_k столбцы, а у матрицы $A^{(k+1)} = V_{i_k j_k}^T(\varphi_k)B^{(k)}$ изменятся только i_k и j_k строки, так что в итоге пересчитываем элементы только двух строк или двух столбцов¹ матрицы по формулам:

$$\begin{aligned}
a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)} \quad i \neq i_k, i \neq j_k, j \neq i_k, j \neq j_k. \\
a_{i i_k}^{(k+1)} &= a_{i i_k}^{(k+1)} = c a_{i i_k}^{(k)} + s a_{i j_k}^{(k)}, \quad i \neq i_k, i \neq j_k, \\
a_{i j_k}^{(k+1)} &= a_{i j_k}^{(k+1)} = -s a_{i i_k}^{(k)} + c a_{i j_k}^{(k)}, \quad i \neq i_k, i \neq j_k. \\
a_{i_k i_k}^{(k+1)} &= c^2 a_{i_k i_k}^{(k)} + 2cs a_{i_k j_k}^{(k)} + s^2 a_{j_k j_k}^{(k)}, \\
a_{j_k j_k}^{(k+1)} &= s^2 a_{i_k i_k}^{(k)} - 2cs a_{i_k j_k}^{(k)} + c^2 a_{j_k j_k}^{(k)}, \\
a_{i_k j_k}^{(k+1)} &= a_{j_k i_k}^{(k+1)} = (c^2 - s^2) a_{i_k j_k}^{(k)} + cs(a_{j_k j_k}^{(k)} - a_{i_k i_k}^{(k)}) = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Очевидно, что собственные векторы будут столбцами матрицы

$$X = V_{i_0 j_0} V_{i_1 j_1} \dots V_{i_k j_k}. \tag{8}$$

Итак, для решения задачи следует выполнить следующие действия:

- 1) Подготовить единичную матрицу для собственных векторов ($X = E$).
- 2) В матрице $A^{(k)}$ ($k = 0, 1, \dots$) выбрать среди всех наддиагональных элементов максимальный по абсолютной величине элемент $a_{i_k j_k}^{(k)}$, $i_k < j_k$ и запомнить его индексы.
- 3) Проверить условие $\left| a_{i_k j_k}^{(k)} \right| < \varepsilon$.
Если условие не выполнено — перейти к п. 4, если выполнено, завершить процесс.
- 4) Найти $c = \cos(\varphi_k)$, $s = \sin(\varphi_k)$.
- 5) Пересчитать элементы матрицы $A^{(k+1)}$ по формулам (7), пересчитать элементы матрицы X^2 .
- 6) Перейти к п.2.

13.2. Апостериорная оценка погрешности собственного числа симметричных матриц

Пусть $\tilde{\lambda}$ — приближенное собственное число матрицы A , \tilde{Y} — ненулевой вектор, рассматриваемый как приближение к собственному вектору Y , который отвечает собственному числу λ . В [1] приведена апостериорная оценка погрешности $\tilde{\lambda}$:

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| \leq \frac{\|A\tilde{Y} - \tilde{\lambda}\tilde{Y}\|_2}{\|\tilde{Y}\|_2}. \tag{9}$$

¹По этой причине нерационально строить матрицу $A^{(k+1)}$ по формуле (1), используя матричные умножения.

²Очевидно, что и для пересчета элементов матрицы X не требуется построение матрицы V и выполнение матричного умножения, так как при умножении на ортогональную матрицу меняются лишь элементы двух столбцов матрицы X .

13.3. Степенной метод и метод скалярных произведений нахождения максимального по модулю собственного числа симметричной матрицы

Пусть наибольшее по модулю собственное значение матрицы λ_1 вещественное, простое и

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Для нахождения λ_1 выберем $Y^{(0)}$ — начальный вектор. $Y^{(0)}$ следует выбирать так, чтобы коэффициент α_1 в разложении $Y^{(0)} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ не был бы слишком мал. Здесь x_1, x_2, \dots, x_n — собственные векторы, так что $Ax_i = \lambda_i x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. $Y^{(0)}$ выбирается опытным путем.

Далее строится последовательность векторов $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots$, по формуле $Y^{(k+1)} = AY^{(k)}$.

$$Y^{(k)} = (y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_n^{(k)})'.$$

13.3.1. Степенной метод

Обозначим

$$(\lambda_1^{(k,i)})_{pow} = \frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}}, \quad (10)$$

тогда

$$\lambda_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_1^{(k,i)})_{pow}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \lambda_1 = (\lambda_1^{(k,i)})_{pow} + O\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k.$$

Хорошее совпадение требуемого числа знаков в отношении

$$\frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}}$$

для нескольких компонент может служить признаком для прекращения итераций.

Для обеспечения заданной точности рекомендуется использовать апостериорную оценку погрешности (9).

Вектор $Y^{(k)}$ можно взять в качестве приближения к собственному вектору.

13.3.2. Метод скалярных произведений

Расчетные формулы метода выпишем в предположении, что матрица симметричная.

Обозначим

$$(\lambda_1^{(k)})_{scal} = \frac{(Y^{(k+1)}, Y^{(k)})}{(Y^{(k)}, Y^{(k)})}, \quad (11)$$

тогда

$$\lambda_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_1^{(k)})_{scal}, \quad \lambda_1 = (\lambda_1^{(k)})_{scal} + O\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}.$$

Хорошее совпадение требуемого числа знаков $(\lambda_1^{(k)})_{scal}$, $(\lambda_1^{(k+1)})_{scal}$ может служить признаком для прекращения итераций (если только λ_2/λ_1 не слишком близко к единице и, соответственно, сходимость будет очень медленной).

Признаком для прекращения итераций может служить также апостериорная оценка погрешности (9). Для метода скалярных произведений она часто бывает завышенной.

Вектор $Y^{(k)}$ можно взять в качестве приближения к собственному вектору.

Замечание 1. При $|\lambda_1| > 1$ компоненты вектора $Y^{(k)}$ быстро растут с возрастанием k , а при $|\lambda_1| < 1$ быстро убывают. Чтобы устранить это нежелательное при вычислениях явление, векторы $Y^{(k)}$ нормируют, например, следующим образом. Пусть

$$|y_p^{(0)}| = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i^{(0)}|,$$

Тогда нормируем вектор $Y^{(k)}$ следующим образом:

$$Y_{norm}^{(k)} = \frac{Y^{(k)}}{y_p^{(k)}},$$

так что

$$(y_{norm}^{(k)})_p = 1.$$

В этом случае расчетная формула в степенном методе примет вид:

$$(\lambda_1^{(k,p)})_{pow} = y_p^{(k+1)} \quad (12)$$

и для достижения требуемой точности в случае $\lambda_2/\lambda_1 \leq 1/2$ можно следить за совпадением требуемого числа знаков у соседних приближений к собственному числу $y_p^{(k)}$ и $y_p^{(k+1)}$.

В общем случае для обеспечения заданной точности рекомендуется использовать апостериорную оценку погрешности (9).

Аналогично в методе скалярных произведений расчетная формула примет вид:

$$(\lambda_1^{(k)})_{scal} = \frac{(AY_{norm}^{(k)}, Y_{norm}^{(k)})}{(Y_{norm}^{(k)}, Y_{norm}^{(k)})}. \quad (13)$$

Замечание 2. Как ранее указывалось, сходимость методов зависит от выбора начального вектора $Y^{(0)}$ и отношения λ_2/λ_1 .

13.4. Нахождение противоположной границы спектра

Обозначим искомое собственное число $\bar{\lambda}(A)$.

Пусть $\lambda_1(A)$ найдено.

Построим матрицу $B = A - \lambda_1(A)E$, так что $\lambda(B) = \lambda(A) - \lambda_1(A)$.

Рассмотрим 2 случая.

а) $\lambda_1(A) > 0$, значит $\lambda_1(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A)$ и требуется найти

$$\bar{\lambda}(A) = \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A).$$

В этом случае $\lambda(B) \leq 0$ и, следовательно, применяя степенной метод или метод скалярных произведений, можно вычислить

$$\bar{\lambda}(B) = \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(B)$$

и далее находим искомое

$$\bar{\lambda}(A) = \bar{\lambda}(B) + \lambda_1(A).$$

б) $\lambda_1(A) < 0$, значит $\lambda_1(A) = \min \lambda(A)$ и требуется найти

$$\bar{\lambda}(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A).$$

В этом случае $\lambda(B) \geq 0$ и, следовательно, применяя степенной метод или метод скалярных произведений, можно вычислить

$$\bar{\lambda}(B) = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(B)$$

и далее находим искомое

$$\bar{\lambda}(A) = \bar{\lambda}(B) + \lambda_1(A).$$

Замечание 5. Если известно, что $\lambda_1(A) > 0$ и в задаче речь сразу идет о нахождении минимального собственного числа, то матрицу B строят следующим образом: $B = A - \|A\|E$.

13.5. Метод Виландта уточнения изолированного собственного числа (метод обратных итераций)

Пусть известно $\lambda^{(0)}(A)$ — приближение к искомому собственному числу матрицы A . Тогда “сдвинутая” матрица $W = A - \lambda^{(0)}(A)E$ будет иметь одно собственное число значительно меньшее по модулю, чем остальные и итерации матрицей $W^{-1} = (A - \lambda^{(0)}E)^{-1}$ дадут быстро сходящийся процесс. Применяя степенной метод или метод скалярных произведений, находим с заданной точностью собственное число $\lambda(W^{-1})$ и учитывая что

$$\lambda(W^{-1}) = 1/(\lambda(A) - \lambda^{(0)}(A)), \text{ находим } \lambda(A) = 1/\lambda(W^{-1}) + \lambda^{(0)}(A).$$

Замечание 1. Процесс будет сходиться тем быстрее, чем точнее подобрано $\lambda^{(0)}(A)$.

Замечание 2. При построении последовательности векторов $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(k)}$ вместо $Y^{(k+1)} = W^{-1}Y^{(k)}$ экономичнее решать систему $WY^{(k+1)} = Y^{(k)}$.

Замечание 3. Для ускорения процесса рекомендуется применять метод Виландта с параметром, то есть с матрицей W^{-1} предполагается выполнять лишь одну итерацию и полученное приближение к собственному числу использовать сразу для уточнения приближения к собственному числу матрицы A , т. е. на каждом шаге выполнять следующие действия:

- 1) Построить матрицу W по формуле $W = A - \lambda^{(k)}E$ (начинать с $k = 0$).
- 2) Найти $Y^{(k+1)}$ из системы $WY^{(k+1)} = Y^{(k)}$.
- 3) Вычислить, например, методом скалярных произведений μ_k — приближение к собственному числу матрицы W^{-1}

$$\mu_k = \frac{(Y^{(k+1)}, Y^{(k)})}{(Y^{(k)}, Y^{(k)})}. \quad (14)$$

- 4) Найти $\lambda^{(k+1)}(A) = 1/\mu_k + \lambda^{(k)}(A)$ и далее повторять, начиная с пункта 1.

Итерации следует выполнять до совпадения требуемого количества знаков $\lambda^{(k)}(A)$ и $\lambda^{(k+1)}(A)$.

13.6. Метод Эйткена уточнения собственного числа эрмитовой матрицы

Метод Эйткена может быть применен при условии $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3|$.

Пусть $\lambda^{(k-2)}$, $\lambda^{(k-1)}$, $\lambda^{(k)}$ — вычисленные ранее приближения к собственному числу λ_1 матрицы, тогда уточнение производится по следующей формуле:

$$\lambda_E^{(k)} = \frac{\lambda^{(k)} \lambda^{(k-2)} - (\lambda^{(k-1)})^2}{\lambda^{(k)} - 2\lambda^{(k-1)} + \lambda^{(k-2)}}. \quad (15)$$

Метод Эйткена применим также и к уточнению собственных векторов, тогда речь идет о покомпонентном применении этого метода.

13.7. Представление результатов

При применении степенного метода, метода скалярных произведений и метода Виландта на печать должны быть выведены следующие данные:

- 1) ФИО студента, номер группы.
- 2) Номер варианта.
- 3) Исходная матрица.
- 4) Собственные числа, собственные векторы, найденные методом вращений.
- 5) λ_1^* — максимальное по модулю собственное число.
- 6) λ_2^*/λ_1^* .
- 7) Название метода.
- 8) Матрица, собственные числа и собственные векторы которой находятся данным методом.
- 9) Собственные числа, собственные векторы, найденные встроенной функцией.
- 10) λ_1^* .
- 11) λ_2^*/λ_1^* .
- 12) ε .
- 13) Y^0 .
- 14) Результаты вычислений оформить в виде таблицы 1.

Таблица 1

k	λ_1^k	$\lambda_1^k - \lambda_1^{k-1}$	$\lambda_1^k - \lambda_1^*$	$\ Ax_1^k - \lambda_1^k x_1^k\ $	error estimate apost.	λ_E^k	$\lambda_E^k - \lambda_1^*$
3							
4							
...

Здесь error estimate apost. — апостериорная оценка погрешности, см. (9).

13.8. Варианты заданий

Вариант 1

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon=0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину.
Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.
Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность. Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.
- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon=0.001$ максимальное по модулю собственное число λ_1 матрицы A и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2 = 1$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2=0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2.
- 4) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon=0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2=1$).
- 5) Найти собственное число λ_1 с точностью $\varepsilon=0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя метод скалярных произведений.

Вариант 2

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon=0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину.
Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.
Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.
Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.
- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon=0.001$ максимальное по модулю собственное число λ_1 матрицы A и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2 = 1$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2 = 0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2.
- 4) Найти, используя метод скалярных произведений с точностью $\varepsilon = 0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2 = 1$).

- 5) Найти собственное число λ_1 с точностью $\varepsilon = 0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя степенной метод.

Вариант 3

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon = 0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину.
Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.
Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.
Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.
- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ максимальное по модулю собственное число λ_1 матрицы A и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2 = 1$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2 = 0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2.
- 4) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2 = 1$).
- 5) Найти собственное число λ_2 с точностью $\varepsilon = 0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя метод скалярных произведений.

Вариант 4

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon = 0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину.
Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.
Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.
Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.
- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ максимальное по модулю собственное число λ_1 матрицы A и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2 = 1$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2 = 0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2.

- 4) Найти, используя метод скалярных произведений с точностью $\varepsilon = 0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2 = 1$).
- 5) Найти собственное число λ_2 с точностью $\varepsilon = 0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя степенной метод.

Вариант 5

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon = 0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину.
Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.
Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.
Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.
- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ максимальное по модулю собственное число λ_1 матрицы A и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2 = 1$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2 = 0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2.
- 4) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2 = 1$).
- 5) Найти собственное число λ_3 с точностью $\varepsilon = 0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя метод скалярных произведений.

Вариант 6

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon = 0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину.
Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.
Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.
Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.
- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ максимальное по модулю собственное число λ_1 матрицы A и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2 = 1$.

- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2 = 0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2.
- 4) Найти, используя метод скалярных произведений с точностью $\varepsilon = 0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2 = 1$).
- 5) Найти собственное число λ_3 с точностью $\varepsilon = 0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя степенной метод.

Вариант 7

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon = 0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину.
Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.
Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.
Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.
- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ максимальное по модулю собственное число λ_1 матрицы A и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2 = 1$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2 = 0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2.
- 4) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2 = 1$).
- 5) Найти собственное число λ_3 с точностью $\varepsilon = 0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя метод скалярных произведений.

Вариант 8

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon = 0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину.
Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.
Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.
Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.

- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ максимальное по модулю собственное число λ_1 матрицы A и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2 = 1$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2 = 0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2.
- 4) Найти, используя метод скалярных произведений с точностью $\varepsilon = 0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2 = 1$).
- 5) Найти собственное число λ_1 с точностью $\varepsilon = 0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя степенной метод.

Вариант 9

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon = 0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину.
Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.
Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.
Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.
- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ максимальное по модулю собственное число λ_1 матрицы A и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2 = 1$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2 = 0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2.
- 4) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2 = 1$).
- 5) Найти собственное число λ_1 с точностью $\varepsilon = 0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя метод скалярных произведений.

Вариант 10

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon = 0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину.
Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.
Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.
Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.

- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ максимальное по модулю собственное число λ_1 матрицы A и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2 = 1$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2 = 0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2.
- 4) Найти, используя метод скалярных произведений с точностью $\varepsilon = 0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2 = 1$).
- 5) Найти собственное число λ_2 с точностью $\varepsilon = 0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя степенной метод.

Вариант 11

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon = 0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину.
Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.
Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.
Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.
- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ максимальное по модулю собственное число λ_1 матрицы A и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2 = 1$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2 = 0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2.
- 4) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2 = 1$).
- 5) Найти собственное число λ_1 с точностью $\varepsilon = 0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя метод скалярных произведений.

Вариант 12

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon = 0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину.
Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.
Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.
Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.

- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ максимальное по модулю собственное число λ_1 матрицы A и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2 = 1$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2 = 0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2.
- 4) Найти, используя метод скалярных произведений с точностью $\varepsilon = 0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2 = 1$).
- 5) Найти собственное число λ_1 с точностью $\varepsilon = 0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя степенной метод.

Вариант 13

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon=0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину.
Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.
Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.
Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы. Найти степенным методом с точностью $\varepsilon=0.001$ максимальное по модулю собственное число λ_1 матрицы A и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2=1$.
- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon=0.001$ максимальное по модулю собственное число λ_1 матрицы A и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2=1$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2=0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2.
- 4) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon=0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2=1$).
- 5) Найти собственное число λ_2 с точностью $\varepsilon=0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя метод скалярных произведений.

Вариант 14

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon=0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину.

Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.

Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.

Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.

- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon=0.001$ максимальное по модулю собственное число λ_1 матрицы A и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2=1$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2=0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2.
- 4) Найти, используя метод скалярных произведений с точностью $\varepsilon=0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2=1$).
- 5) Найти собственное число λ_2 с точностью $\varepsilon=0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя степенной метод.

Вариант 15

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon=0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину.
Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.
Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.
Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.
- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon=0.001$ максимальное по модулю собственное число λ_1 матрицы A и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2=1$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2=0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2.
- 4) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon=0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2=1$).
- 5) Найти собственное число λ_3 с точностью $\varepsilon=0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя метод скалярных произведений.

13.9. Варианты матриц

матрица 1	-0.81417	-0.01937	0.41372	матрица 2	-0.82005	-0.13542	0.26948
	-0.01937	0.54414	0.00590		-0.13542	0.51486	0.02706
	0.41372	0.00590	-0.81445		0.26948	0.02706	-0.83365
матрица 3	-1.48213	-0.03916	1.08254	матрица 4	-1.53698	-0.19907	0.95855
	-0.03916	1.13958	0.01617		-0.19907	1.17742	0.06992
	1.08254	0.01617	-1.48271		0.95855	0.06992	-1.55151
матрица 5	-1.14896	-0.53716	0.78959	матрица 6	-0.95121	-0.09779	0.35843
	-0.53716	0.88917	0.19536		-0.09779	0.61545	0.02229
	0.78959	0.19536	-1.28186		0.35843	0.022286	-0.95729
матрица 7	-1.00449	-0.38726	0.59047	матрица 8	-1.47887	-0.09357	0.91259
	-0.38726	0.73999	0.12519		-0.09357	1.10664	0.03298
	0.59047	0.12519	-1.08660		0.91259	0.03298	-1.48225
матрица 9	-0.90701	-0.27716	0.44570	матрица 10	-0.88192	-0.04644	0.33422
	-0.27716	0.63372	0.07774		-0.04644	0.56023	0.01075
	0.44570	0.07774	-0.95535		0.33422	0.01075	-0.88342
матрица 11	-0.93016	-0.25770	0.45254	матрица 12	-1.71126	-0.07170	1.23615
	-0.25770	0.65022	0.07193		-0.07170	1.34019	0.02903
	0.45255	0.07193	-0.97112		1.23615	0.02903	-1.71295
матрица 13	-1.00449	-0.38726	0.59047	матрица 14	-1.47887	-0.09357	0.91259
	-0.38726	0.73999	0.12519		-0.09357	1.10664	0.03298
	0.59047	0.12519	-1.08660		0.91259	0.03298	-1.48225
матрица 15	-1.48213	-0.05316	1.08254	матрица 16	-1.51898	-0.19907	0.95855
	-0.05316	1.13958	0.01617		-0.19907	1.17742	0.06992
	1.08254	0.01617	-1.48271		0.95855	0.06992	-1.57151

Список литературы

- [1] Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы: Учебное пособие. 4-е изд., СПб., 2014.
- [2] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М., 2001. СПб., 2006.
- [3] Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы. Т. I, II. М., 1977.
- [4] Мысовских И.П. Лекции по методам вычислений. СПб., 1998.
- [5] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. СПб., 2002.
- [6] Практикум по численным методам. Воронкова А.И., Даугавет И.К., Марданов А.А. и др. СПб., 2003.